Translasi Keadaan Koheren pada Boson Komposit Menggunakan Operator Heisenberg

Hadyan L. Prihadi[1,a)], Jusak S. Kosasih[1,b)]

[1]Laboratorium Fisika Teoretik
Kelompok Keilmuan Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumentasi,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a)] hadyanluthfanp@hotmail.com
[b)] jusak@fi.itb.ac.id

Abstrak

Boson komposit merupakan partikel yang dibentuk oleh dua fermion atau dua boson. Sedangkan, keadaan koheren merupakan keadaan yang memberikan ketidakpastian minimum. Keadaan koheren khususnya pada boson komposit memiliki peran yang cukup penting, dengan salah satu contohnya adalah aplikasi pada fisika optik kuantum. Sebelumnya sudah diteliti mengenai keadaan koheren pada boson komposit oleh Su-Yong Lee (Phys. Rev. A 88, 063602 (2013)) dengan aplikasinya yaitu untuk menentukan jumlah okupasi maksimum. Dalam tulisan kali ini, akan dibahas bagaimana keadaan koheren pada boson komposit ditranslasikan bagian ruang dan momentumnya menggunakan Operator Heisenberg tanpa mengubah nilai ketidakpastian posisi dan momentumnya.

Kata-kata kunci: Boson Komposit, Keadaan Koheren, Operator Heisenberg

PENDAHULUAN

Keadaan koheren merupakan keadaan dari suatu fungsi gelombang yang memberikan ketidakpastian posisi dan momentum $\Delta x = \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (dengan mengambil konstanta $m = \omega = \hbar = 1$) dengan tujuan untuk mendapatkan paket gelombang yang memiliki ketidakpastian minimum sehingga dapat didekati dengan limit klasik. Keadaan koheren selalu memiliki bentuk *Gaussian*. Keadaan koheren memainkan peran penting dalam fisika kuantum, dan memiliki aplikasi praktis khususnya dalam teknologi optik kuantum dan fisika laser [1, 2]. Selain itu, keadaan koheren juga memiliki aplikasi yang penting dalam fisika matematik, antara lain dalam melakukan aproksimasi fasa stasioner dalam path integral [3,4]

Suatu partikel disebut sebagai partikel komposit apabila partikel tersebut merupakan partikel yang dibentuk oleh dua atau lebih partikel fundamental lainnya. Partikel komposit dapat dipandang sebagai partikel titik (tak berdimensi) boson (apabila memiliki jumlah fermion genap) atau fermion (apa bila terdiri dari sejumlah ganjil fermion). Partikel komposit, selain merupakan partikel yang dibentuk oleh beberapa fermion, dapat juga merupakan partikel yang dibentuk oleh boson.

Partikel komposit memiliki peran penting dalam bidang fisika, antara lain dalam semikonduktor dan *Bose-Einstein condensation*. Dalam skala kosmologi, sebagian besar materi adalah komposit, yaitu "materi *baryonic*," karena proton dan neutron mendominasi kontribusi energi alam semesta. [1] Partikel komposit dikarakterisasi dengan melihat seberapa mirip partikel komposit tersebut dengan partikel elementer tunggal (fermion atau boson). [1,5]

Tinjau suatu partikel komposit C yang dibentuk oleh dua partikel terbedakan A dan B yang dapat merupakan fermion atau boson. Misalkan $\Psi(x_A, x_B)$ merupakan fungsi gelombang dari sistem dua partikel tersebut. Fungsi gelombang tadi dapat dinyatakan dalam bentuk "*Schmidt Decomposition*" (*Schmidt decomposition* merupakan cara untuk mengekspresikan suatu vektor dalam perkalian tensor (*tensor product*) dari dua ruang hasil kali dalam (*inner product spaces*)) sebagai berikut [5]

$$\Psi(x_A, x_B) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\ \phi_n^{(A)}(x_A)\phi_n^{(B)}(x_B). \quad (1)$$

Dengan $\phi_n^{(A)}$ dan $\phi_n^{(B)}$ membentuk *complete orthonormal set* untuk partikel A dan B. Jika partikel A berada dalam mode $\phi_n^{(A)}$, maka partikel B harus berada dalam mode $\phi_n^{(B)}$. Sedangkan distribusi dari λ_n menggambarkan pengukuran *entanglement*. Suatu operator kreasi untuk partikel boson komposit dapat didefinisikan sebagai berikut. [1,5]

$$c^{\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, a_n^{\dagger} b_n^{\dagger}\,. \quad (2)$$

Tujuan dari penulisan makalah ini adalah untuk menentukan suatu operator yang dapat menghasilkan keadaan koheren pada boson komposit dari keadaan vakum dan kemudian melihat perbedaannya dengan partikel tunggal. Operator translasi tersebut dinamakan Operator Heisenberg dan bekerja dengan cara melakukan translasi pada posisi dan momentum dari suatu keadaan vakum sehingga didapat nilai posisi dan momentum yang menggambarkan keadaan koheren yaitu nilai yang memberikan ketidakpastian minimum.

OPERATOR TRANSLASI (OPERATOR HEISENBERG) UNTUK BOSON KOMPOSIT

Definisikan suatu operator sehingga ketika bekerja pada fungsi gelombang partikel komposit (fungsi posisi atau momentum) dapat mentranslasikan posisi sebesar a dan momentum sebesar b dengan besar yang sama untuk kedua partikel pembentuk sebagai berikut.
Posisi:

$$T_i(a) = e^{-ia\widehat{p_i}} \quad (3)$$
$$(T_A(a)T_B(a)\psi)(x_A, x_B) = \psi(x_A - a, x_B - a) \quad (4)$$
$$(T_A(a)T_B(a)\phi)(p_A, p_B) = e^{-iap_A}e^{-iap_B}\phi(p_A, p_B) \quad (5)$$

Momentum:

$$S_i(b) = e^{ib\widehat{x_i}} \quad (6)$$
$$(S_A(b)S_B(b)\psi)(x_A, x_B) = \mathrm{e}^{ibx_A}e^{ibx_B}\psi(x_A, x_B) \quad (7)$$
$$(S_A(b)S_B(b)\phi)(p_A, p_B) = \phi(p_A - b, p_B - \mathrm{b}) \quad (8)$$

Kemudian, hubungan komutasi dari operator translasi posisi dan momentum tersebut diberikan oleh:

$$\left[T_i(a), S_j(b)\right] = (e^{-iab} - 1)S_j(b)T_i(s)\delta_{ij}\,, \quad (9)$$

atau

$$S(b)T(a) = e^{iab}T(a)S(b)\,. \quad (10)$$

Untuk partikel komposit, dapat dituliskan operator translasi posisi dan momentum tersebut dalam bentuk *Schmidt Decomposition* analog dengan persamaan (2) sebagai berikut.

$$T'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_{Tn}}\, T_{An}(a)T_{Bn}(a), \quad (11)$$

$$S'(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_{Sn}}\, S_{An}(b)S_{Bn}(b). \quad (12)$$

Kemudian, perkenalkan operator translasi berikut yang mentranslasikan posisi dan momentum sekaligus untuk partikel komposit dan partikel tunggal dan dinamakan operator Heisenberg (pada persamaan (14) dan (15) diperlukan teorema Glauber yang merupakan kasus khusus dari teorema Baker–Campbell–Hausdorff, lihat Appendix A):

$$W(a, b) = e^{i(b\hat{x} - a\hat{p})}\,, \quad (13)$$
$$W(a, b) = e^{\frac{iab}{2}}T(a)S(b) = e^{-\frac{iab}{2}}S(b)T(a)\,, \quad (14)$$
$$W'(a, b) = e^{\frac{iab}{2}}T'(a)S'(b) = e^{-\frac{iab}{2}}S'(b)T'(a). \quad (15)$$

Operator tersebut tidak mengubah ketidakpastian posisi dan momentum. Kemudian, keadaan koheren pada partikel tunggal dapat didefinisikan sebagai berikut

$$|a, b\rangle = W(a, b)|0\rangle, \quad \langle\hat{x}\rangle = a, \qquad \langle\hat{p}\rangle = b. \quad (16)$$

Definisikan besaran baru α, dengan a_0 dan b_0 merupakan pergeseran posisi dan momentum sehingga kombinasi posisi dan momentum tersebut membentuk keadaan koheren sebagai berikut

$$\alpha = \frac{a_0 + ib_0}{\sqrt{2}}; \quad \bar{\alpha} = \frac{a_0 - ib_0}{\sqrt{2}}, \tag{17}$$

sehingga

$$W(a_0, b_0) = e^{i(b_0\hat{x} - a_0\hat{p})} \rightarrow W(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a)}. \tag{18}$$

Analog dengan persamaan (2), untuk partikel boson komposit diperoleh operator Heisenberg sebagai berikut dengan z merupakan suatu besaran analog dengan persamaan (17) untuk boson komposit.

$$W'(z) = e^{(zc^\dagger - \bar{z}c)}. \tag{19}$$

Dengan menggunakan Teorema Glauber (Appendix A) dan hubungan komutasi $[c, c^\dagger] = 1 + s\Delta$ dengan $\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (a_n^\dagger a_n + b_n^\dagger b_n)$ dan dengan $s = +1$ untuk partikel komposit yang terdiri atas dua partikel boson dan $s = -1$ untuk partikel komposit yang terdiri atas dua partikel fermion [5], diperoleh ungkapan operator Heisenberg untuk partikel komposit adalah sebagai berikut

$$e^{(zc^\dagger)} e^{(-\bar{z}c)} = e^{\left(zc^\dagger - \bar{z}c + \frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)\right)}, \tag{20}$$

atau

$$W'(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} e^{(zc^\dagger)} e^{(-\bar{z}c)}. \tag{21}$$

Apabila operator tersebut bekerja pada keadaan vakum untuk boson komposit (dengan menggunakan $|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\chi_n}} \frac{c^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ [1]), maka akan menghasilkan keadaan koheren pada boson komposit $|\varsigma\rangle$ sebagai berikut

$$|\varsigma\rangle = W'(z)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} e^{(zc^\dagger)} e^{(-\bar{z}c)} |0\rangle, \tag{22}$$

dengan

$$e^{(-\bar{z}c)}|0\rangle = \left[1 - \bar{z}a + \frac{1}{2}\bar{z}^2 a^2 - \cdots\right]|0\rangle = |0\rangle, \tag{23}$$

dan

$$e^{(zc^\dagger)}|0\rangle = \left[1 + zc^\dagger + \frac{1}{2}z^2 c^{\dagger 2} + \cdots\right]|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi_n}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \tag{24}$$

sehingga

$$|\varsigma\rangle = W'(z)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi_n}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{25}$$

NILAI EIGEN KEADAAN KOHEREN BOSON KOMPOSIT

Definisi matematis dari keadaan koheren adalah suatu keadaan $|\alpha\rangle$ yang merupakan keadaan eigen dari operator anihilasi a, dengan nilai eigen $\alpha \in \mathbb{C}$ sehingga $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Pada boson komposit, dengan menggunakan operator anihilasi c, persamaan eigen untuk keadaan koheren menjadi $c|z\rangle = z|z\rangle$ dengan $z \in \mathbb{C}$.

$$c|\varsigma\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi_n!}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} c|n\rangle. \tag{26}$$

Dengan operator anihilasi c yang bekerja pada keadaan $|n\rangle$ diberikan oleh referensi [1] dan ϵ_n merupakan suku koreksi dengan $\langle \epsilon_n | \epsilon_n \rangle = 1 - n\frac{\chi_n}{\chi_{n-1}} + (n-1)\frac{\chi_{n+1}}{\chi_n}$, maka

$$c|\varsigma\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi_n!}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{\chi_n!}{\chi_{n-1}!}} \sqrt{n!}\, |n-1\rangle + O(\epsilon_n)\right], \tag{27}$$

maka

$$\begin{aligned} c|\varsigma\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi_{n-1}!}} z^n |n-1\rangle + O(\epsilon_n)\right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi_n!}} z^{n+1} |n\rangle + O(\epsilon_n)\right] \\ &= z e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi_n!}} z^n |n\rangle + \Sigma \end{aligned}$$

 ISBN: 978-602-61045-4-0

$$= z|\varsigma\rangle + \Sigma \tag{29}$$

Sehingga diperoleh bahwa $|\varsigma\rangle = |z\rangle$ merupakan keadaan eigen dari keadaan koheren pada boson komposit yang memenuhi persamaan eigen $c|z\rangle = z|z\rangle$ untuk partikel komposit yang menyerupai partikel tunggal. Suku koreksi Σ dan Δ digunakan untuk melihat seberapa mirip boson komposit tersebut dengan partikel tunggal [1,5] dengan bentuk eksplisit dari Σ adalah

$$\Sigma = e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)} \sum_{n=0}^{\infty} O(\epsilon_n). \tag{30}$$

Suku koreksi diatas juga ditentukan oleh partikel penyusun boson komposit tersebut (tersusun dari dua buah partikel boson atau dua buah partikel fermion). Suku koreksi Σ merupakan fungsi dari Δ dan ϵ_n.

KESIMPULAN

Operator translasi atau operator Heisenberg yang digunakan untuk membangkitkan keadaan koheren pada boson komposit diberikan oleh persamaan (21). Perbedaannya dengan operator Heisenberg untuk partikel tunggal adalah pada bagian $e^{-\frac{1}{2}|z|^2(1+s\Delta)}$ karena hubungan komutasi operator kreasi dan anihilasi pada boson komposit berbeda dengan yang terdapat pada partikel tunggal dengan $[a, a^\dagger] = 1$ sehingga suku pertama operator Heisenberg untuk partikel tunggal hanyalah $e^{-\frac{1}{2}|z|^2}$. Pada boson komposit, pengaruh penyusun partikel komposit tersebut juga diperhitungkan yaitu apakah partikel komposit tersebut terdiri dari dua buah fermion atau dua buah boson. Pada persamaan (25), operator $W'(z)$ dapat digunakan untuk membangkitkan keadaan koheren pada partikel boson komposit dari keadaan vakum dengan cara melakukan translasi posisi dan momentumnya tanpa mengubah ketidakpastian posisi dan momentum partikel boson komposit tersebut sehingga tetap merupakan keadaan koheren. Keadaan koheren yang dihasilkan digambarkan oleh $|\varsigma\rangle$.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis (HLP) mengucapkan terimakasih kepada Dr. Jusak Sali Kosasih atas ketersediaannya mengajar selama satu semester pada mata kuliah Fisika Kuantum Lanjut sehingga penulis dapat mengerjakan makalah ini atas diskusi dan ilmunya yang bermanfaat.

APPENDIX A: TEOREMA GLAUBER

Teorema: Jika A dan B merupakan suatu operator sehingga $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, maka

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B]\right)$$

Pembuktian:

Misalkan terdapat suatu fungsi $F(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$, sehingga

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = Ae^{\lambda A}e^{\lambda B} + e^{\lambda A}Be^{\lambda B} = \left(A + e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}\right)F(\lambda)$$

Kemudian misalkan suatu fungsi lain $Y(\lambda) = e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}$, sehingga

$$\frac{dY(\lambda)}{d\lambda} = e^{\lambda A}(AB - BA)e^{-\lambda A} = e^{\lambda A}[A,B]e^{-\lambda A}$$

$$\frac{d^2Y(\lambda)}{d\lambda^2} = e^{\lambda A}A[A,B] - [A,B]Ae^{-\lambda A} = e^{\lambda A}\big[A,[A,B]\big]e^{-\lambda A}$$

$$\frac{d^3Y(\lambda)}{d\lambda^3} = e^{\lambda A}\Big[A,\big[A,[A,B]\big]\Big]e^{-\lambda A}$$

...

Sehingga,

$$Y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}Y(\lambda)|_{\lambda=0} = B + \lambda[A,B] + \frac{t^2}{2!}\big[A,[A,B]\big] + \frac{t^3}{3!}\Big[A,\big[A,[A,B]\big]\Big] + \cdots$$

Maka,

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = (A + B + \lambda[A,B])F(\lambda).$$

Kemudian dengan menyelesaikan persamaan diferensial tersebut dengan mengambil $F(0) = 1$ dan menggunakan $\lambda = 1$, kita mendapatkan pembuktian dari Teorema Glauber [6,7].

Untuk memperoleh Operator Heisenberg pada persamaan (14) dan (15), misalkan $A = -ia\hat{p}$ dan $B = ib\hat{x}$ sehingga $[A, B] = -iab \in \mathbb{C}$, dan gunakan Teorema Glauber diatas sehingga

$$T(a)S(b) = e^{-ia\hat{p}}e^{ib\hat{x}} = e^{i\left(-a\hat{p}+b\hat{x}-\frac{ab}{2}\right)},$$

Atau

$$W(a,b) = e^{\frac{iab}{2}}T(a)S(b) = e^{-\frac{iab}{2}}S(b)T(a).$$

REFERENSI

1. Lee, Su-Yong. *Coherent states of composite bosons*. Phys. Rev. A **88**, 063602 (2013).
2. Klauder, J. R. dan Skagerstam, Bo-S. (eds). *Coherent States*. (1985). World Scientific, Singapore.
3. Perelomov, A., Generalized Coherent States and Their Applications. (1986). Springer–Verlag.
4. Funahashi, K., Kashiwa, T., Sakoda, S. and Fujii, K. *Coherent states, path integral, and semiclassical approximation*. J. Math. Phys. **36**, 3232 (1995).
5. Law, C. K. *Quantum entanglement as an interpretation of bosonic character in composite two-particle systems*. Phys. Rev. A **71**, 034306 (2005).
6. Jack (https://physics.stackexchange.com/users/118807/jack), Glauber's Formula, URL (version: 2017-08-04): https://physics.stackexchange.com/q/350267.
7. Kryukov, Alexey A. *Linear algebra and differential geometry on abstract Hilbert Space*. (2018). arXiv:0704.3225v1.