Bentuk Volumetric Irisan Kerucut (Persiapan Modul Cara Menghitung Volume Irisan Kerucut)

Rizky Maiza[1,a)], Triati Dewi Kencana Wungu [2,b)], Lilik Hendrajaya [3,c)]

[1] Magister Pengajaran Fisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[2] Kelompok keilmuan Fisika Nuklir dan Biofisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[3] Kelompok Keilmuan Fisika Bumi dan Sistem Kompleks,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a)] rizkymaiza@gmail.com
[b)] triati@fi.itb.ac.id
[c)] lilik.hendrajaya3@gmail.com

Abstrak

Kerucut merupakan bentuk unik yang mempunyai sifat istimewa dimana kerucut tersebut dibatasi oleh selubung berkas garis melalui satu titik dengan bidang datar memotong berkas. Sifat ini mudah terlihat pada kerucut dengan alas lingkaran dan proyeksi puncak tepat pada pusat lingkaran. Irisan pada kerucut akan menghasilkan alas bidang yang berbentuk lingkaran, ellips, hiperbola, dan parabola. Adapun cara menghitung volume irisan kerucut dapat menggunakan perumusan integral lipat, untuk menghitung luas selubungnya dengan cara pemakaian kertas millimeter block. Penggunaan model fisik irisan kerucut pada modul ini juga memberikan visualisasi keindahan, sehingga menarik untuk mempelajarinya. Selain menggunakan kalkulus, perhitungan volume kerucut dapat dilakukan berdasarkan hukum Archimedes.

Kata-kata kunci: Integral lipat,koordinat silinder, volume irisan kerucut, hukum archimedes, luas selubung

PENDAHULUAN

Kerucut merupakan suatu benda yang dibatasi oleh berkas garis-garis yang melalui sebuah titik (disebut puncak) dan bidang datar yang memotong berkas tersebut. Irisan kerucut adalah kerangka konseptual yang sangat kuat untuk membawa aljabar, geometri, aplikasi matematika dan digunakan dalam berbagai bidang pengetahuan lainnya secara bersama-sama. Seperti halnya ilmu fisika yang menggunakan rumusan matematika dalam berbagai perhitungan. Dengan adanya integrasi ini membuat pembelajaran fisika dan matematika lebih bermakna dan memicu keterampilan berpikir yang lebih tinggi. Penerapan aplikasi dari irisan kerucut semakin bervariasi dalam ilmu fisika maupun dalam kajian teknik. Irisan kerucut memberikan aplikasi penting dalam fisika matematis, misalnya orbit benda astronomi seperti planet atau komet dan benda-benda lain disekitar matahari merupakan contoh irisan kerucut [1].

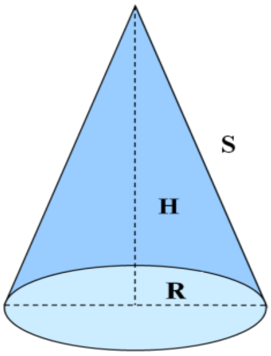
Mengiris sebuah kerucut di berbagai posisi akan menghasilkan bidang dua dimensi. Empat bidang yang dapat dibentuk dari irisan kerucut yaitu lingkaran, elips, hiperbola dan parabola. Pada paper ini akan dibahas

ISBN: 978-602-61045-1-9

cara menghitung volume potongan kerucut secara metode analitik dan metode eksperimen. Adapun metode analitik menggunakan integral lipat sedangkan metode eksperimen melalui perhitungan berdasarkan prinsip Archimedes dengan membuat alat peraga berupa model irisan kerucut. Dengan adanya alat peraga tersebut diharapkan mampu membantu proses pembelajaran dalam melakukan percobaan

Teori Dasar

Kerucut Umum



Gambar 1. Kerucut

Kerucut dapat dibentuk dari sebuah lingkaran dan satu titik disebut titik puncak yang terletak di atas atau di bawah lingkaran. Titik puncak dihubungkan ke setiap titik pada lingkaran membentuk suatu bidang kerucut. Jarak antara titik puncak ke titik pusat lingkaran alas yang membentuk garis tegak lurus dengan alas kerucut disebut dengan ***h*** atau ketinggian kerucut. Panjang salah satu garis lurus yang terhubung dari titik puncak ke titik lingkaran disebut dengan ***s*** atau panjang sisi miring kerucut. Maka $S^2 = R^2 + H^2$ dimana R sebagai jari-jari alas kerucut.
Rumus Umum Kerucut :

$$V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times H \tag{1}$$

Menghitung volume kerucut menggunakan koordinaat silinder dengan elemen volume :

$$dV = R\ dRdzd\varphi \tag{2}$$

Menghitung volume kerucut menggunakan koordinaat bola dengan elemen volume:

$$dV = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR \tag{3}$$

Luas permukaan kerucut, misalnya kerucut memiliki jari-jari R dan tinggi kemiringan s maka keliling dari alas kerucut adalah 2πR. Untuk luas permukaan kerucut :

$$\text{Luas} = \pi\text{Rs} + \pi\text{R}^2 \tag{4}$$

ISBN: 978-602-61045-1-9

Irisan Kerucut

Gambar 2. Irisan Kerucut

Irisan kerucut dalam geometri merupakan kurva yang terbentuk dari perpotongan bidang dengan kerucut. Dari irisan tersebut membentuk kurva yang berbentuk lingkaran, elips, parabola dan hiperbola. Lingkaran merupakan kurva bidang datar yang jarak titik pada kurvanya sama dari suatu titik yaitu titik pusat lingkaran. Lingkaran termasuk kurva yang dikenal sebagai bagian perpotongan kerucut melingkar tegak lurus terhadap sumbu kerucut. Elips merupakan salah satu irisan kerucut yang berbentuk kurva tertutup dibentuk oleh bidang yang memotong semua elemen tepat di lingkaran kerucut. Parabola, bidang lengkung, salah satu bagian kerucut yang dibentuk oleh perpotongan kerucut dengan bidang sejajar dengan garis lurus pada permukaan miring kerucut. Hiperbola, bidang lengkung, salah satu bagian kerucut yang dibentuk oleh bidang yang memotong kedua bagian dari suatu sisi alas pada bagian alas lingkaran dari sebuah kerucut [1].

Prinsip Archimedes

Bila sebuah benda seluruhnya atau sebagian dicelupkan di dalam suatu suatu fluida (baik cairan maupun suatu gas) yang diam, maka fluida tersebut mengarahkan tekanan pada tiap-tiap bagian permukaan benda yang bersentuhan dengan fluida tersebut. Tekanan dari fluida tersebut lebih besar pada bagian benda yang tercelup lebih dalam. Resultan semua gaya adalah sebuah gaya yang mengarah ke atas dinamakan kakas apung (buoyancy) dari benda yang tercelup tersebut. Tekanan pada setiap bagian permukaan tidak bergantung pada bahan benda. Maka gaya resultan yang mengarah ke atas pada benda tersebut akan sama dengan berat benda dan akan bereaksi secara vertikal yang arahnya ke atas melalui pusat gravitasinya. Dari sini diperoleh *prinsip Archimedes*, yakni bahwa sebuah benda yang seluruhnya atau sebagian tercelup di dalam suatu fluida akan diapungkan ke atas dengan sebuah gaya yang sama dengan berat fluida yang dipindahkan oleh benda tersebut [2].

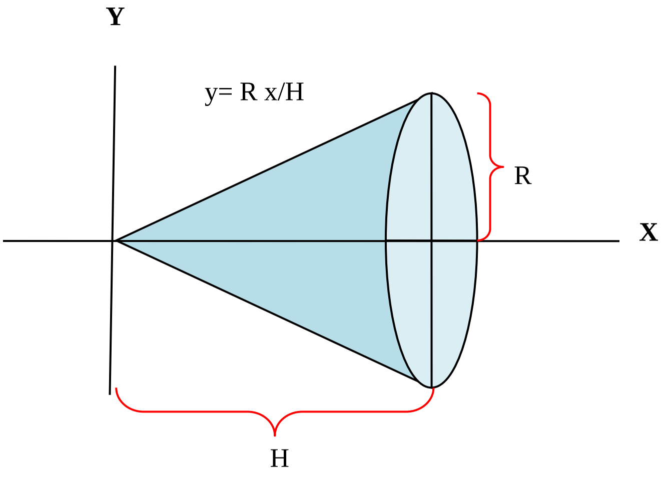
MENGHITUNG VOLUME IRISAN KERUCUT

Irisan lingkaran

Jika sebuah kerucut dipotong tegak lurus dengan tinggi kerucut atau secara mendatar sejajar alas kerucut hingga membentuk volume terpancung, maka permukaan irisan kerucut akan berbentuk lingkaran. Bentuk kerucut akan sama dengan bentuk kerucut pada umumnya, sehinga untuk menghitung volume kerucut dapat menggunakan persamaan umum kerucut, dimana luas alas berupa lingkaran = πR^2dan H adalah tinggi kerucut. persamaan volume untuk alas berbentuk lingkaran adalah

$$V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times H \quad (5)$$

Volume kerucut dengan menggunakan integral



Gambar 3. Irisan lingkaran

Berikut persamaan sisi miring kerucut, diperoleh dari persamaan *y = mx* dengan *m = dy/dx= R/H* sehingga *y = R x /H*. Maka didapat persamaan kerucut

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx \tag{6}$$

Subtitusikan nilai y= Rx/H ke dalam persamaan (6)

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx$$

$$V = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^2 \, dx$$

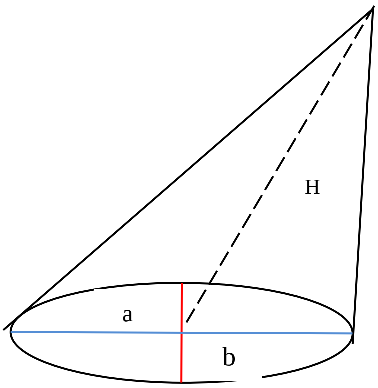
$$V = \frac{\pi R^2}{H^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H$$

$$V = \frac{\pi R^2}{R^2} \left(\frac{R^3}{3}\right)$$

Maka didapatlah persamaan volume kerucut umum

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \mathrm{H} \tag{7}$$

Irisan elips



Gambar 4. Irisan ellips

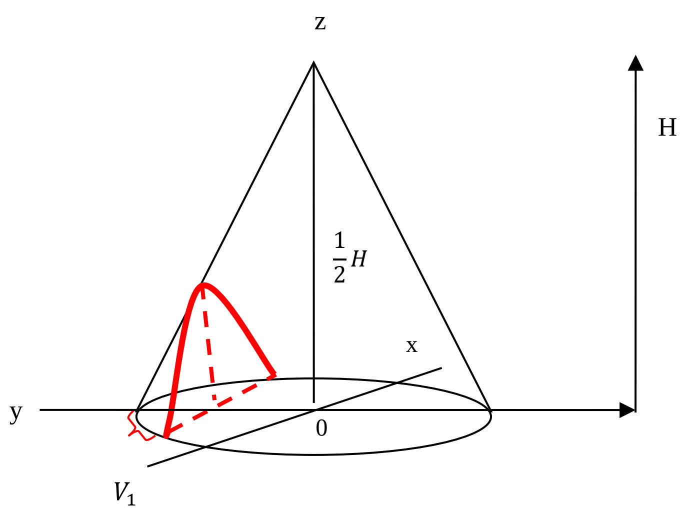
Jika sebuah kerucut di potong miring tegak lurus dengan sisi miring tanpa memotong alas kerucut maka permukaan irisan kerucut akan berbentuk ellips. Untuk menghitung volume kerucut dengan permukaan irisan berbentuk ellips, dapat dihitung dulu luas alasnya dengan menggunakan persaman :

$$Luas\ ellips = \pi ab \tag{8}$$

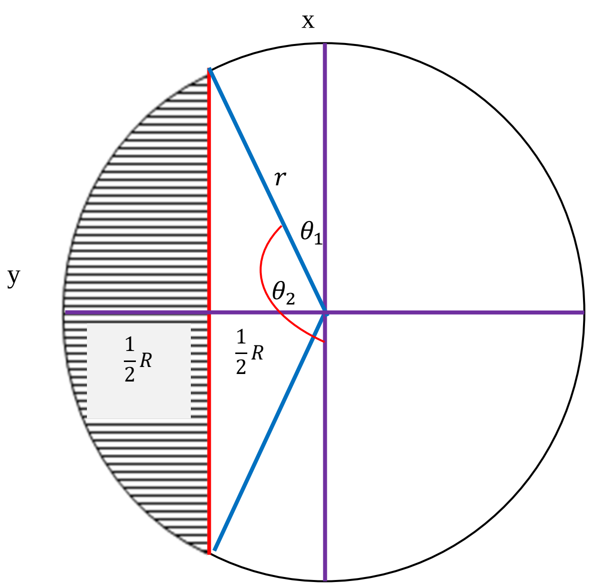
Dimana a = diagonal 1 dan b = diagonal 2, tinggi (H) = proyeksi puncak pada ellips. Maka volumenya :

$$V = \frac{1}{3} \times \pi ab \times \mathrm{H} \tag{9}$$

Irisan hiperbola



Gambar 5. Irisan Hiperbola



Gambar 6. Batas – batas bidang hiperbola

Untuk menghitung volume irisan kerucut berbentuk hiperbola,ditentukan terlebih dahulu batas-batas integralnya. Dari gambar diatas didapat batas-batasnya, yaitu :

Batas-batas pada sumbu x adalah

$$\sin\theta = \frac{\frac{1}{2}R}{R}$$

$$\theta_1 = \arcsin\frac{1}{2}$$

$$\theta_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2}$$

Dengan R adalah jari-jari lingkaran, dan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, maka batas-batas pada sumbu y adalah

$$y = \frac{1}{2}R$$

$$y = r\sin\theta_2 = \frac{1}{2}R$$

Untuk nilai r

$$r = \frac{1}{2}\frac{R}{\sin\theta_2}$$

Sehingga

$$r = R$$

Batas-batas pada sumbu z adalah

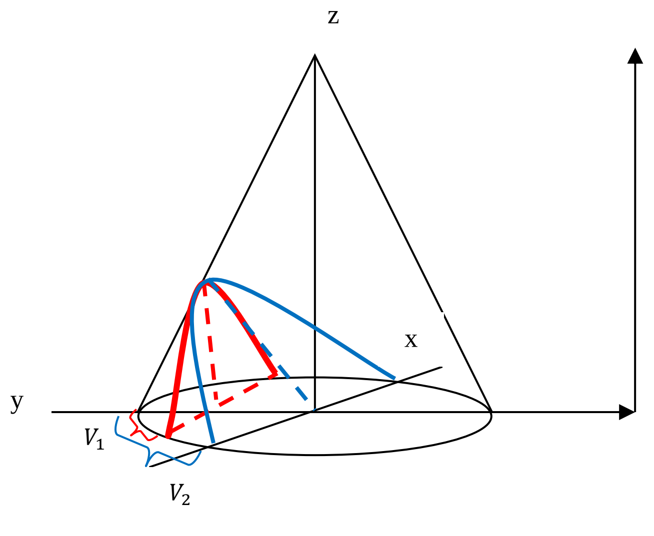
Batas atas , $z_{max} = \frac{H}{R}r + H$

Batas bawah = 0

Untuk irisan kerucut yang diiris sejajar dengan tinggi kerucut, maka alasnya akan berbentuk hiperbola. Untuk menggitung alas kerucut dapat menggunakan persamaan :

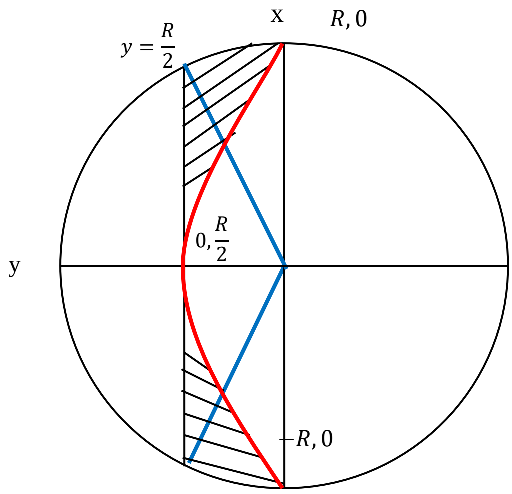
$$V = \int_{arc\sin\frac{1}{2}}^{\pi - arc\sin\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}\frac{R}{\sin\theta_2}}^{R} \int_{z=0}^{\frac{H}{R}r} dz\, dR\, d\varphi \qquad (10)$$

Irisan Parabola



Gambar 7. Irisan parabola

Dari gambar dapat diketahui , V_1 adalah volume dari irisan kerucut hiperbola. Maka, $V_2 = V_1 +$ *integral dari batas bidang hiperbola tegak ke bidang hadap parabola* .



Gambar 8. Batas –batas pada alas irisan parabola

Seperti halnya menghitung volume pada irisan hiperbola, menghitung volume irisan parabola juga menentukan batas-batas integralnya terlebih dahulu. Dari gambar diatas, maka batas-batasnya adalah :

Alas *Vx* ada dua yaitu :

$$V_{x1} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{R}{2} \leq y \leq \frac{R}{2}$$

Pada $0 \leq x \leq \frac{R}{2}\sqrt{3}$

$$V_{x2} = -\frac{1}{2R}x^2 + \frac{R}{2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$

Pada $\frac{R}{2}\sqrt{3} < x < R$

Untuk persamaan proyeksi parabola

$$y = -\frac{1}{2R}x^2 + \frac{R}{2}$$

Dengan menggunakan persamaan y = ax^2 + bx+c dan memasukkan (R,0), (0,$\frac{R}{2}$), (-R,0). Persamaan integralnya dalam kartesian :

$$\frac{1}{2}V_{x1} = \int_0^{x=\frac{R}{2}\sqrt{3}} \int_{-\frac{1}{2}x^2+\frac{R}{2}}^{R/2} \left[\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} + H\right] \, dy \, dx \qquad (11)$$

$$\frac{1}{2}V_{x2} = \int_{\frac{R}{2}\sqrt{3}}^{R} \left[\int_{-\frac{x^2}{2R}+\frac{R}{2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left[\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} + H\right] dy \right] dx \qquad (12)$$

Maka ½ Vx = ½ V_{x1}+ ½ V_{x2}

Untuk volume dengan batas-batas pada sumbu x adalah penjumlahan dari V_{x1} dan V_{x2}

$$Vx = V_{x1} + V_{x2}$$

Volume dengan batas-batas pada sumbu y adalah

$$V_y = \int_{arc\sin\frac{1}{2}}^{\pi - arc\sin\frac{1}{2}} \left[\int_{y=0}^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{R}{2}} \left[\int_0^{\frac{H}{R}y} dz\right] dy\right] dx \qquad (13)$$

Jadi volume dibawah parabola adalah $V_2 = V_1 + V_x + V_y$

Perhitungan Volume Benda Dengan Prinsip Archimedes

Jika suatu benda bervolume V dan berat jenisnya ρ jika dibenamkan ke dalam zat cair (air), maka :

a. Benda akan tenggelam jika ρ benda > ρ air

b. Benda yang ditenggelamkan dengan diikat dan dicelupkan kedalam zat cair hingga dasar bejana, sehingga terjadi kenaikan permukaan air dalam bejana tersebut

Untuk kasus ρ benda > ρ air :
Berat benda jika ditimbang diudara adalah w_{udara}. Benda yang ditenggelamkan ke dalam air beratnya adalah $w_{tercelup}$ Selisih berat zat cair yang dipindahkan adalah $w_{udara} - w_{tercelup} = w_{bf}$.
Besar gaya ke atas (F_A) dari zat cair sama dengan berat zat cair yang dipindahkan (w_{bf})

$$F_A = w_{bf} \tag{14}$$

$$m_{bf} \cdot g = w_{bf}$$

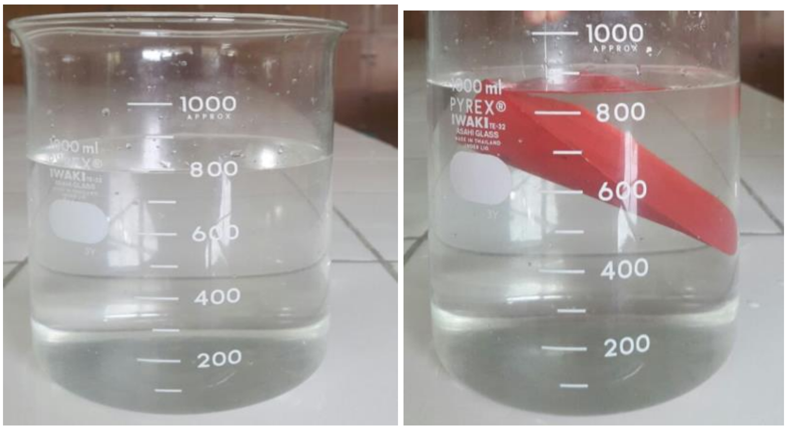
persamaan menjadi

$$\rho_{air} \cdot V_{bf} \cdot g = w_{bf} \tag{15}$$

Dari persamaan tersebut volume benda tercelup (V_{bf}) dapat dihitung dengan persamaan :

$$v_{bf} = \frac{w_{bf}}{\rho_{air} \cdot g} \tag{16}$$

Untuk ρ benda < ρ air :
Isi air ke dalam bejana dengan volume penuh (maksimum sampai ke permukaan). Masukkan benda kemudian ditekan dengan jarak yang tipis maka permukaan air akan naik dan air keluar. Volume air yang keluar sama dengan volume yag bertambah. volume air yang bertambah adalah volume dari irisan kerucut tersebut.

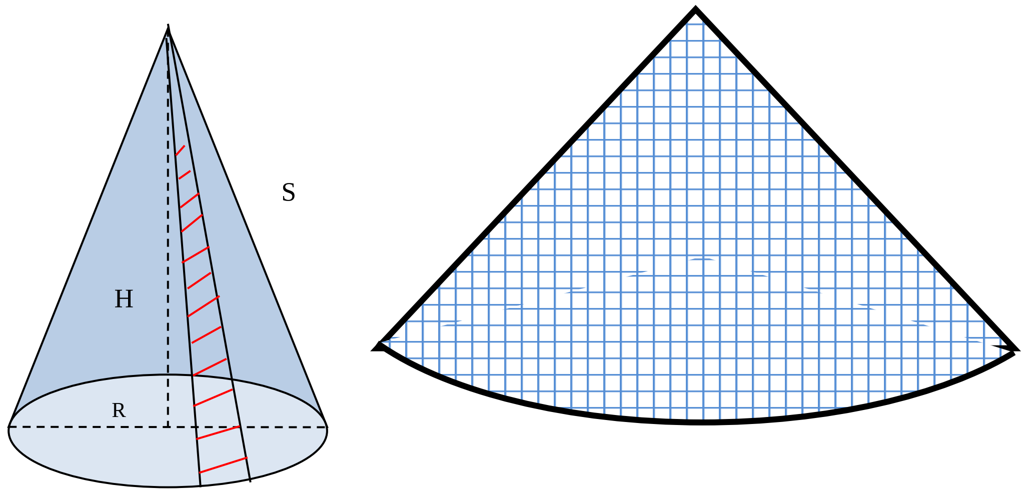


Gambar 9. Percobaan mengukur volume irisan kerucut dengan prinsip Archimedes

Berdasarkan gambar percobaan diatas, terjadi kenaikan air ketika irisan kerucut dicelupkan ke dalam air. Bersarnya volume irisan kerucut sama dengan kenaikan volume air dalam bejana tersebut.

Luas Selubung Kerucut

Selain mengukur volume, luas permukaan kerucut juga dapat diukur tanpa menggunakan perhitungan rumus kerucut pada umumnya, yaitu dengan menggunakan kertas grafik sesuai dengan ukuran luas permukaan kerucut. Kertas grafik ditempel menutupi seluruh permukaan irisan kerucut dengan luasan yang sama dengan luas permukaan irisan kerucut yang diukur. Kemudian kertas tersebut dibuka dan dihitung jumlah kotaknya. Jumlah kotak yang telah dihitung disetarakan dengan satuan luas mm^2 atau cm^2 sesuai dengan skala millimeter block yang digunakan.



Gambar 10. Luas selubung kerucut

KESIMPULAN

Pada paper ini telah dibahas cara menghitung volume irisan kerucut dengan perhitungan kalkulus menggunakan integral lipat dan berdasarkan prinsip hukum Archimedes. Luas permukaan kerucut juga dapat dihitung dengan menggunakan kertas grafik. Menampilkan bentuk fisik dan penggunaan modul ini akan memudahkan pembelajaran fisika matematika. Pembelajaran pada perumusan integral lipat ini dapat dikembangkan untuk membuat modul kasus terapan dalam mendampingi kuliah fisika matematika.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam penulisan makalah ini dan kepada teman-teman Pengajaran Fisika yang telah membantu dan mendukung serta keikutsertaan mereka dalam diskusi yang bermanfaat.

REFERENSI

1. A.O Fatade, et al. Teaching conic sections and their applications. Journal of Modern Mathematics and statistic. 5 (3). 60-65.(2011)
2. D. Hallliday dan R. Resnick. Fisika Jilid 1 Edisi ketiga. New York (1978)
3. P. Brown et.al. Cones, Pyramids and Spheres. The Improving mathematics Education In School (TIMES) Project. Australia (2011)