

Pemodelan Kejadian Ekstrem Spatio-Temporal dengan *Max Stable Processes*

Ikha Rizky Ramadani*, Sutikno, dan Suhartono

Abstrak

Extreme Value Theory (EVT) merupakan salah satu metode statistika untuk mengidentifikasi kejadian ekstrem. Metode ini biasanya digunakan untuk memodelkan kejadian yang bersifat ekstrem, seperti kerugian yang jarang terjadi tetapi memiliki dampak yang sangat besar. Salah satu terapan EVT pada bidang lingkungan adalah analisis kejadian cuaca ekstrem, seperti: badai salju, gelombang panas, dan curah hujan ekstrem yang kerap menimbulkan dampak destruktif pada kehidupan manusia. Seringkali analisis kejadian ekstrem dilakukan secara univariat atau hanya satu lokasi. Pada kajian kuantitas unsur cuaca seperti suhu dan curah hujan diukur menurut lokasi dan waktu atau mengikuti kaidah data spasial. Oleh sebab itu, pemodelan spasial dan temporal untuk analisis kejadian ekstrem perlu dilakukan. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah *Max Stable Processes (MSP)*. Metode ini memodelkan dependensi ekstremal antar lokasi dengan mentransformasikan distribusi marginal nilai ekstrem ke dalam distribusi Frechet. Aspek temporal diperhitungkan ke dalam MSP atau disebut dengan *Space-Time Max Stable Processes*. Makalah ini mengkaji prosedur analisis *Space-Time Max Stable Processes* dengan aplikasi data curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan. Grafik extremal coefficient menunjukkan bahwa ukuran dependensi spasial berada pada kisaran 1,4 hingga 1,8. Hasil estimasi return level dengan periode ulang dua tahun pendekatan EVT univariat dan MSP bernilai hampir sama, dengan RMSE berturut-turut sebesar 39,65 dan 39,23. Kedua metode memiliki kinerja sama baiknya dalam analisis curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan.

Kata-kata kunci: *Extreme value theory, max stable processes, space-time max stable processes*

Pendahuluan

Max Stable Processes (MSP) merupakan metode statistika untuk menganalisis kejadian ekstrem secara spasial. Metode ini berfungsi untuk memodelkan dependensi spasial dengan mentransformasikan distribusi marginal nilai ekstrem ke dalam distribusi Frechet. Pada awalnya, *Multivariate Extreme Value Theory* dikembangkan untuk menganalisis kejadian ekstrem di beberapa lokasi, dengan lokasi dianggap sebagai variabel multivariat. Smith[1] kemudian mengembangkan ide tersebut menjadi *Spatial Extremes*, dengan mempelajari distribusi gabungan dari nilai ekstrem pada lokasi yang berbeda-beda melalui pendekatan MSP. Penerapan *Max Stable Processes* dalam pemodelan *spatial extreme value* pertama kali dilakukan oleh Smith[1] pada data curah hujan di Inggris. Model yang dikemukakan dalam penelitian tersebut dikenal dengan model *Smith's storm profile*. Model lain dikemukakan oleh Schlather[2] yang mengembangkan pemodelan *spatial extreme value* melalui *Max Stable Processes* berdasarkan *Gaussian random field*. Selain itu, Davison, Padoan, dan Ribatet[3] melakukan pemodelan *spatial extreme value* dengan *Max Stable Processes*. Perluasan metode *Max Stable Processes* untuk pemodelan

kejadian ekstrem dengan aspek *space-time* dikaji oleh Huser dan Davison [4] dengan mengembangkan model yang dikemukakan oleh Schlather[2] pada kasus curah hujan ekstrem di Swiss. Metode yang digunakan untuk estimasi parameter adalah melalui metode *pairwise likelihood*. Penelitian lain dilakukan oleh Davis, Kluppelberg, dan Steinkohl[5]. Terdapat dua pendekatan yang digunakan yaitu melalui fungsi korelasi *space-time* dan perluasan dari model *Smith's storm profile*. Penelitian tersebut melakukan aplikasi pada data curah hujan di beberapa stasiun di Florida dengan dua macam domain waktu, yaitu curah hujan per jam dan harian.

Aspek *spatial* dan *space-time* pada *extreme value theory* penting untuk dipelajari supaya dapat mengidentifikasi dan melakukan prediksi kejadian ekstrem secara lebih akurat. Karena itu, makalah ini mengkaji prosedur pemodelan *space-time extreme value* dengan pendekatan *Max Stable Processes*. Model yang digunakan adalah *Smith's storm profile* dengan aplikasi analisis curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan.

Teori

Max Stable Processes (MSP) merupakan perluasan distribusi *multivariate extreme value* ke dimensi tak hingga (*infinite dimension*). Suatu fungsi distribusi G dikatakan *max stable* jika dan hanya jika G berdistribusi GEV (*Generalized Extreme Value*). Misalkan T merupakan suatu himpunan dan $\{\tilde{X}_i(t), t \in T\}, i = 1, \dots, n$ merupakan proses stokastik yang saling bebas (*independent*). Jika terdapat rangkaian fungsi kontinu $a_n(t) > 0$ dan $b_n(t) \in R$ sehingga :

$$M(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1}^n \tilde{X}_i(t) - b_n(t)}{a_n(t)}, t \in T, \quad (1)$$

maka proses stokastik $\{M(t), t \in T\}$ adalah *Max Stable Processes* (de Haan, 1984) [6]. Menurut (Davis, Kluppelberg, dan Steinkohl, 2013)[5], model *Space-time max stable processes* didapat dengan menambahkan domain *space-time* $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ pada konstruksi *max stable processes*, seperti pada persamaan (2) :

$$\eta(s, t) = \max_{j \geq 1} \{\xi_j f(z_j, x_j; s, t)\}, \quad (2)$$

$\eta(s, t)$ merupakan curah hujan ekstrem pada lokasi s dan waktu t dengan $\xi_j f(z_j, x_j; s, t)$ adalah curah hujan yang turun pada lokasi z_j dan waktu x_j . Komponen ξ_j merupakan intensitas curah hujan dan $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$.

Dependensi ekstremal yang digunakan adalah fungsi korelasi *space-time* proses Gaussian stasioner seperti pada persamaan (3) :

$$\rho(h, u) = E[Z(s, t)Z(s+h, t+u)] \quad (3)$$

Koefisien dependensi ekstremal h dan u didefinisikan pada persamaan (4)

$$\delta(h, u) = \theta_1 \|h\|^{\alpha_1} + \theta_2 \|u\|^{\alpha_2} \quad (4)$$

dengan $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 2]$ dan $\theta_1, \theta_2 \geq 0$. Koefisien ekstremal $\psi = (\theta_1, \alpha_1, \theta_2, \alpha_2)$ diestimasi menggunakan metode *Pairwise Likelihood Estimation* seperti pada persamaan (5).

$$PL^{(M, T)}(\psi) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \sum_{k=1}^{T-\min\{k+p, T\}} \log_{\psi} \left(\eta(s_i, t_k), \eta(s_j, t_l) \right) \quad (5)$$

$s_i - s_j \leq r$

Untuk menentukan *return level*, digunakan persamaan (6).

$$z_T(x) = \mu(x) + \sigma(x) \frac{\left\{ -\log\left(1 - \frac{1}{T}\right) \right\}^{-\xi(x)} - 1}{\xi(x)}. \quad (6)$$

Menurut Gilli dan Kellezi [6], *Return level* merupakan ambang batas maksimum yang dicapai dalam periode ulang (*return period*) tertentu (T). Peluang tercapainya ambang batas maksimum adalah sebesar $p = \frac{1}{T}$.

Hasil dan Diskusi

Data yang digunakan adalah data curah hujan harian tahun 1981-2010 di Kabupaten Lamongan, Provinsi Jawa Timur. Terdapat tujuh lokasi pengukuran curah hujan sebagai unit observasi yaitu: pos Babat, Blawi, Karangbinangun, Kedungrejo, Lamongan, Pangkatrejo, dan Sukodadi. Pemrosesan data dilakukan dengan membagi data menjadi dua, yaitu data *learning* yang digunakan untuk pemodelan dan data *testing* untuk validasi. Data *learning* berupa curah hujan harian tahun 1981-2010, sedangkan data *testing* berupa curah hujan harian tahun 2011 dan 2012.

Analisis data diawali dengan identifikasi nilai ekstrem. Curah hujan harian dibagi menjadi empat blok tiga bulanan, yaitu DJF (Desember-Januari-Februari), MAM (Maret-April-Mei), JJA (Juni-Juli-Agustus), dan SON (September-Oktober-November) selama 30 tahun (1981-2010) sehingga total blok yang terbentuk adalah sebesar 119. Nilai ekstrem kemudian diidentifikasi melalui nilai maksimum dari masing-masing blok. Selanjutnya, dilakukan estimasi parameter *location*, *shape*, dan *scale* secara univariat di masing-masing lokasi. Setelah itu pemeriksaan distribusi dilakukan untuk menguji apakah data ekstrem mengikuti distribusi GEV. Hasil estimasi parameter disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Parameter Distribusi GEV

Lokasi	<i>location</i>	<i>scale</i>	<i>shape</i>
Babat	60,265	35,459	-0,322
Blawi	47,240	31,536	-0,109
Karangbinangun	46,532	28,535	-0,162
Kedungrejo	51,363	31,456	-0,254
Lamongan	42,086	25,845	-0,183
Pangkatrejo	48,705	26,753	-0,268
Sukodadi	45,786	29,371	-0,274

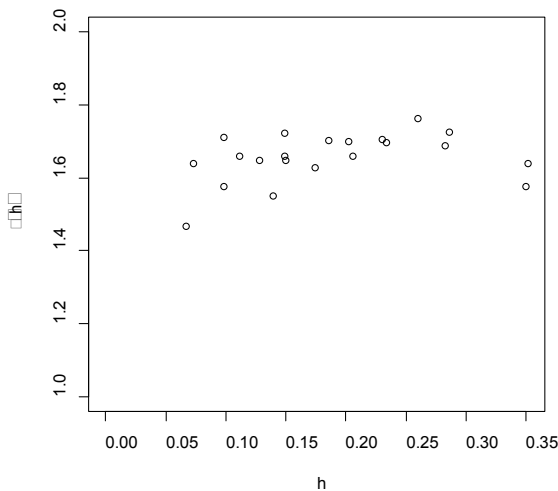
Tabel 4.1 menunjukkan bahwa nilai *shape* untuk seluruh pos curah hujan bernilai negatif dan

hampir sama besarnya. Hal ini menunjukkan karakteristik curah hujan yang cenderung hampir sama antara satu lokasi dengan lokasi lain atau cenderung bersifat homogen. Nilai D_{hitung} untuk seluruh lokasi bernilai lebih kecil dibandingkan dengan D_α ($\alpha=0.05$), seperti pada Tabel 2. Kesimpulan yang didapat adalah gagal tolak H_0 yang berarti data telah mengikuti distribusi teoritis yaitu distribusi GEV (*Generalized Extreme Value*).

Tabel 2. Statistik Uji Kesesuaian Distribusi GEV

Lokasi	D_{hitung}	D_α
Babat	0,064	0,125
Blawi	0,079	0,125
Karangbinangun	0,063	0,125
Kedungrejo	0,062	0,125
Lamongan	0,076	0,125
Pangkatrejo	0,088	0,125
Sukodadi	0,078	0,125

Langkah selanjutnya mengestimasi dependensi ekstremal. Nilai dependensi disajikan dalam bentuk grafik *extremal coefficient*, seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Estimasi *Extremal Coefficient* Tujuh Pos Curah Hujan

Titik-titik yang terdapat pada grafik *extremal coefficient* menunjukkan lag spasial atau jarak antara dua lokasi. Semakin jauh jarak antar lokasi, semakin besar kemungkinan adanya independensi. Nilai $\theta(h)$ menunjukkan besaran dependensi ekstremal antar lokasi yang berada pada kisaran 1 hingga 2. Dikatakan *complete dependence* jika nilai $\theta(h)=1$, dan *complete independence* jika nilai $\theta(h)=2$. Gambar 1 menunjukkan bahwa titik-titik menyebar di sekitar nilai 1.4 hingga 1.8, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat dependensi spasial antar lokasi.

Hasil estimasi parameter GEV spasial $\mu(x)$, $\sigma(x)$, dan $\xi(x)$ dengan model *trend surface* seperti pada persamaan (7) dan model MSP *Smith's Storm Profile* disajikan pada Tabel 3.

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \beta_{0,\mu} + \beta_{1,\mu} \ln(x) + \beta_{2,\mu} \ln^2(x), \\ \sigma(x) &= \beta_{0,\sigma} + \beta_{1,\sigma} \ln(x) + \beta_{2,\sigma} \ln^2(x), \\ \xi(x) &= \beta_{0,\xi}.\end{aligned}\quad (7)$$

Tabel 3. Estimasi Parameter GEV Spasial dengan *Smith's Storm Profile*

Lokasi	<i>location</i>	<i>scale</i>	<i>shape</i>
Babat	55,043	32,116	-0,224
Blawi	45,202	28,281	-0,224
Karangbinangun	43,453	27,400	-0,224
Kedungrejo	51,567	31,911	-0,224
Lamongan	44,524	28,784	-0,224
Pangkatrejo	52,783	30,343	-0,224
Sukodadi	49,306	30,139	-0,224

Perbedaan hasil estimasi parameter antara metode univariat dan metode MSP terletak pada dependensi spasial antar lokasi yang ikut diperhitungkan. Hasil *return level* untuk tahun 2012 dengan rumus (6) disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. *Return Level* Periode Dua Tahun dengan Metode EVT Univariat (dalam mm)

Lokasi	Tahun 2012
Babat	72,45
Blawi	58,56
Karangbinangun	56,69
Kedungrejo	62,35
Lamongan	51,25
Pangkatrejo	58,05
Sukodadi	56,04

Terdapat perbedaan hasil estimasi *return level* antara pendekatan univariat dan MSP. Pada pos Babat, *return level* yang dihasilkan melalui metode EVT univariat adalah sebesar 72,45 mm, sedangkan melalui metode MSP, diperoleh 66,34 mm.

Tabel 5. *Return Level* Periode Dua Tahun dengan Metode MSP (dalam mm)

Lokasi	Tahun 2012
Babat	66,34
Blawi	55,15
Karangbinangun	53,09
Kedungrejo	62,79
Lamongan	54,65
Pangkatrejo	63,46
Sukodadi	59,91

Secara keseluruhan, estimasi *return level* kedua metode pada masing-masing lokasi hampir sama. Untuk mengetahui metode yang terbaik, digunakan kriteria RMSE (*Root Mean Square Error*), seperti disajikan pada Tabel 6.

Tabel 6. Nilai RMSE Metode EVT Univariat dan MSP

Metode	RMSE
EVT Univariat	39,65
MSP	39,23

Kriteria model terbaik adalah model dengan RMSE kecil. Berdasarkan Tabel 6, nilai RMSE metode EVT univariat hampir sama besarnya dengan metode MSP. Artinya kedua metode memiliki kinerja yang sama baiknya dalam kasus curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan.

Kesimpulan

Secara umum pendekatan univariat dan MSP memiliki kinerja yang sama dalam estimasi parameter dan nilai *return level*. Hal ini mungkin terjadi apabila data cenderung independen atau memiliki dependensi spasial yang lemah. Perlu diteliti lebih jauh mengenai besar nilai dependensi ekstremal untuk menjamin data tersebut dikategorikan dependen maupun independen. Penelitian ini masih dilanjutkan untuk mendapatkan estimasi parameter dengan melibatkan dependensi spasial sekaligus temporal. Selain itu, terdapat model MSP lain yang dapat diterapkan.

Referensi

- [1] R.L. Smith, "Max-stable processes and spatial extremes", University of North Carolina, 1990, Tidak Dipublikasikan
- [2] Martin Schlatter, "Models for stationary max-stable random fields", *Extremes* 5(1), 2002, p.33-44.
- [3] A.C.Davison, A.S. Padoan, dan M. Ribatet. "Statistical modeling of spatial extremes", *Statistical Science*. 27(2), 2012, p.161-186.

- [4] Raphael Huser dan A.C. Davison, "Space-time modeling of extreme events", 2012, arXiv:1201.3245v1
- [5] Davis, R.A., C. Kluppelberg, & C. Steinkohl. 2013. *Max-stable processes for modeling extremes observed in space and time*. Journal of the Korean Statistical Society. 42: 399-414.
- [6] Manfred Gilli & Evis Kellezi, "An application of extreme value theory for measuring risk," University of Geneva, 2003

Ikha Rizky Ramadani*

Magister Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
ikharizky@gmail.com

Sutikno

Jurusan Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
sutikno@statistika.its.ac.id

Suhartono

Jurusan Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
suhartono@statistika.its.ac.id

*Corresponding author