Orientasi Gerak Sistem 3 Partikel Menggunakan Metode Euler

Donny Dwiputra[1,a)], Jesi Pebralia[1,b)], Yunita Citra Dewi[1,c)], Rouf[1,d)] dan Sparisoma Viridi[2,e)]

[1]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[2]Laboratorium Fisika Komputasi,
Kelompok Keilmuan Fisika Nuklir dan Biofisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia, 40132

[a)] donny.dwiputra@ymail.com (corresponding author)
[b)] jesipebralia@gmail.com
[c)] yunita.citra.dewi@gmail.com
[d)] abdur.rouf049@gmail.com
[e)] dudung@fi.itb.ac.id

Abstrak

Partikel merupakan objek yang memiliki massa, posisi, kecepatan, serta terpengaruh oleh gaya, tetapi tak berdimensi ruang. Namun kumpulan sistem partikel bisa menjadi sistem yang memiliki dimensi ruang. Berdasarkan penjelasan tersebut, struktur massa nonrigid dapat didekati dengan menggunakan sistem N partikel yang dihubungkan oleh beberapa "pegas" sederhana. Terdapat-benda-benda riil yang cenderung jatuh pada orientasi tertentu, trajektori gerak jatuh bebas sistem massa nonrigid ini relatif berbeda dengan gerak jatuh bebas partikel sederhana. Paper ini mensimulasikan gerak suatu benda yang tersusun oleh sistem partikel dimana distribusi massa, efek konstanta pegas, dan gesekan udara merupakan aspek penting yang harus diperhitungkan. Dilakukan juga perbandingan antara gerak pusat massa sistem massa nonrigid dengan gerak partikel sederhana. Diperkirakan semakin heterogen distribusi massa sistem partikel, orientasi gerak benda akan semakin acak.

Kata-kata kunci: Euler, Gerak jatuh, massa nonrigid, sistem partikel

PENDAHULUAN

Partikel adalah objek yang memiliki massa, posisi dan kecepatan serta dapat dipengaruhi oleh gaya-gaya. Partikel dibedakan menjadi dua jenis berdasarkan struktur pembentuknya yaitu partikel rigid dan partikel non-rigid. Pada penelitian ini, sistem partikel yang ditinjau adalah sistem partikel non-rigid. Sistem partikel non-rigid adalah sekumpulan partikel-partikel yang membentuk suatu struktur tertentu dimana masing-masing partikel penyusun sistem dihubungkan melalui pegas dengan konstanta pegas tertentu [1]. Adapun struktur partikel dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu *regular particles* dan *irregular particles* [2]. *Regular particles* adalah partikel-partikel yang mempunyai susunan kisi-kisi teratur seperti kubus, segitiga, tetrahedral, dan lain sebagainya. Sedangkan, *irregular particles* adalah partikel-partikel yang mempunyai susunan kisi-kisi yang tidak teratur.

Pemodelan pada benda pejal telah sebelumnya dilakukan oleh, contohnya, [3-5] dengan beberapa variasi algoritma yang pada umumnya bertumpu pada perhitungan tensor momen inersia yang cukup kompleks. Pada

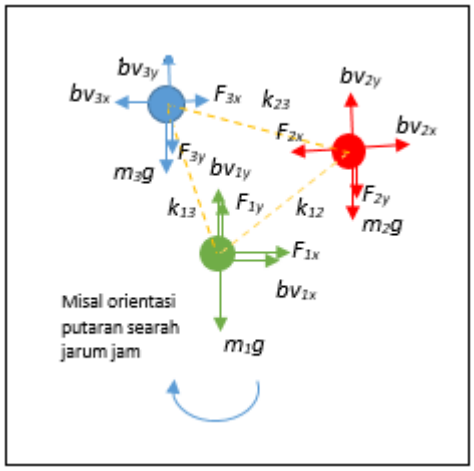
tulisan ini dilakukan simulasi sederhana untuk memodelkan benda tegar (sistem partikel), dengan mengaproksimasi sistem benda pejal menjadi sistem tiga partikel terhubung dengan pegas berkonstanta pegas besar. Dalam penelitian ini, struktur partikel yang digambarkan adalah *regular particles* dengan sistem partikel berbentuk segitiga. Sistem partikel berbentuk segitiga digambarkan oleh tiga buah partikel yang masing-masing dihubungkan dengan suatu pegas. Sistem partikel dengan masing-masing partikel mempun-

TINJAUAN TEORI

Pada penelitian ini disimulasikan gerak sebuah benda yang jatuh tanpa kecepatan awal. Dinamika gerak ini dijelaskan oleh hukum Newton kedua, dengan persamaan:

$$\vec{F} = \sum_i m_i a_i \tag{1}$$

di mana m adalah massa benda dan *a* adalah percepatan benda. Persamaan (1) menggambarkan resultan gaya-gaya yang bekerja terhadap suatu benda dan hubungannya dengan percepatan benda.



Gambar 1. Diagram gaya-gaya yang bekerja pada sistem 3 partikel

Adapun gaya-gaya yang bekerja pada sistem partikel meliputi gaya gravitasi, gaya gesek udara dan gaya pegas. Gaya gravitasi adalah gaya tarik bumi yang dinyatakan oleh persamaan

$$\vec{F}_G = m_i g\hat{j} \tag{2}$$

dengan *m* menyatakan massa partikel dan *g* adalah besar percepatan gravitasi. Gaya lain yang mempengaruhi gerak sistem partikel adalah gaya hambat udara. Gaya hambat udara adalah gaya yang disebabkan oleh adanya gesekan antara benda yang jatuh dengan udara. Gaya hambat udara dinyatakan oleh persamaan berikut

$$\vec{F}_{fi} = -b_i \vec{v}_i \tag{3}$$

dengan b_i merupakan koefisien hambatan tiap partikel. Pada sistem tiga partikel, masing-masing partikel mempunyai sistem partikel tertentu. Selanjutnya gaya lain yang mempengaruhi sistem partikel adalah gaya pegas. Gaya pegas dinyatakan oleh persamaan berikut.

$$\vec{F}_{si} = -k_i \vec{r}_i \tag{4}$$

dengan k_i merupakan konstanta pegas yang menghubungkan antar partikel. Adapun sifat dari pegas yang digunakan dalam sistem partikel non-rigid ini adalah pegas yang memiliki konstanta pegas yang sangat besar sehingga akan meminimalkan atau bahkan meniadakan efek tegangan dan regangan yang muncul. Adapun resultan gaya-gaya yang mempengaruhi orientasi gerak dari sistem tiga partikel adalah penjumlahan dari ketiga gaya di atas. Sehingga diperoleh

$$\vec{F}_i = \vec{F}_G + \vec{F}_{fi} + \vec{F}_{si} \tag{5}$$

Substitusi persamaan (5) ke persamaan (1) sehingga diperoleh persamaan

$$\vec{a}_i = \vec{g} - \frac{b_i}{m_i}\vec{v}_i - \frac{k_i}{m_i}\vec{r}_i \tag{6}$$

yang merupakan percepatan partikel setiap saat.

Orientasi gerak jatuh bebas sistem tiga partikel dimodelkan dalam gerak dua dimensi yaitu dalam sumbu horizontal *x* dan sumbu vertikal *y*. Kecepatan sistem partikel hanya memiliki komponen pada arah *x* dan *y*

$$\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y \tag{7}$$

Konstanta pegas yang digunakan sangat besar sehingga kombinasi 3 partikel ini bisa dianggap sebagai *rigid body*. Konstanta gesekan udara bernilai konstan untuk satu partikel. Sedangkan pembeda konstanta gesekan udara untuk partikel yang berbeda dibedakan dengan faktor α dan β. Adapun berkaitan dengan tumbukan yang terjadi antara partikel dengan dinding, peristiwa tumbukannya dianggap lenting sempurna.

SOLUSI NUMERIK DAN ALGORITMA

Dengan menggunakan metode Euler, persamaan (6) dapat memberikan kecepatan dan posisi setiap saat untuk arah *x*, untuk tiap partikel-*i*,

$$a_{xi}(t) = -\frac{b_i}{m_i} v_{xi}(t) - \frac{k_i}{m_i} x_i(t) \tag{8}$$

$$v_{xi}(t+\Delta t) = v_{xi}(t) + a_{xi}(t)\Delta t \tag{9}$$

$$r_{xi}(t+\Delta t) = r_{xi}(t) + v_{xi}(t)\Delta t \tag{10}$$

dan untuk arah y,

$$a_{yi}(t) = g_y - \frac{b_i}{m_i} v_{xi}(t) - \frac{k_i}{m_i} y_i(t) \tag{11}$$

$$v_{yi}(t+\Delta t) = v_{yi}(t) + a_{yi}(t)\Delta t \tag{12}$$

$$r_{yi}(t+\Delta t) = r_{yi}(t) + v_{yi}(t)\Delta t \tag{13}$$

Dalam implementasi persamaan-persamaan (8) – (13) dituangkan dalam algoritma sebagai berikut.

L01. Inisialisasi nilai awal $m[3]$, $k[3]$, $l[3]$, $b[3]$, $v_x[3]$, $v_y[3]$, $x[3]$, $y[3]$, $F_x[3]$, $F_y[3]$, a_1, a_2, b_1, b_2, x_{pm}, y_{pm}

L02. Δt, t_{begin}, t_{end}

L03. $t = t_{begin}$

L04. Iterasi partikel i = 0, i < 3, i++

L05. Percepatan sebelum memantul, $a_x[i](t) = -\frac{b[i]}{m[i]} v_x[i](t) - \frac{k[i]}{m[i]} x[i](t)$,

$$a_y[i](t) = g - \frac{b[i]}{m[i]} v_y[i](t) - \frac{k[i]}{m[i]} y[i](t)$$

L06. Kecepatan sebelum memantul, $v_x[i](t+\Delta t) = v_x[i](t) + a_x[i](t)\Delta t$, $v_y[i](t+\Delta t) = v_y[i](t) + a_y[i](t)\Delta t$

L07. Syarat pantul : sumbu *x*, $x[i] < a_1$ atau $x[i] > a_2$; sumbu *y*, $y[i] < b_1$ atau $y[i] > b_2$

L08. Percepatan setelah memantul, $a_x[i](t) = \frac{b[i]}{m[i]} v_x[i](t) - \frac{k[i]}{m[i]} x[i](t)$,

$$a_y[i](t) = g + \frac{b[i]}{m[i]} v_y[i](t) - \frac{k[i]}{m[i]} y[i](t)$$

L09. Kecepatan setelah memantul, $v_x[i](t+\Delta t) = -v_x[i](t) + a_x[i](t)\Delta t$, $v_y[i](t+\Delta t) = -v_y[i](t) + a_y[i](t)\Delta t$

L10. Posisi tiap partikel : $r_x[i](t+\Delta t) = r_x[i](t) + v_x[i](t)\Delta t$, $r_y[i](t+\Delta t) = r_y[i](t) + v_y[i](t)\Delta t$

L11. Posisi pusat massa sistem partikel : $r_{xpm}(t+\Delta t) = r_{xpm}(t) + \frac{\sum_i r_x[i](t)m[i]}{M}$,

$$r_{ypm}(t+\Delta t) = r_{ypm}(t) + \frac{\sum_i r_y[i](t)m[i]}{M}$$

L12. Energi kinetic $E_K(t) = E_K(t) + \frac{1}{2} m[i]\left(v_x[i]^2 + v_y[i]^2\right)$

L13. Energi potensial $E_P(t) = E_P(t) + \frac{1}{2} k[i]\left(x[i]^2 + y[i]^2\right)$

L14. Energi mekanik total $E(t) = E_K(t) + E_P(t)$

L15. Definisikan dan hitung parameter orientasi $r_{yp}[i] = r_{xpm} - r_x[i]$, $r_{yp}[i] = r_{ypm} - r_y[i]$

L16. *Time increment* $t = t + \Delta t$

L17. $t \leq t_{end}$ → L03
L18. Output $x[3](t)$, $y[3](t)$, r_{xpm}, r_{ypm}, E_K, E_P, E, t
L19. Export output ke springs.txt, springs-energy.txt, springs-CM-Frame.txt

HASIL DAN DISKUSI

Simulasi ini menggunakan nilai parameter yang pada dasarnya *scale invariant*, tetapi masuk akal jika kita interpretasikan satuannya dalam SI. Nilai-nilai parameter yang digunakan dalam simulasi tercantum dalam Tabel 1.

Tabel 1. Nilai-nilai parameter simulasi

Parameter	Simbol	Nilai parameter
Massa	$m[3]$	{100, 100, 100}
Konstanta pegas	$k[3]$	$\{1, 1, 1\} \times 10^8$, $\{1, 1.2, 1.3\} \times 10^8$
Panjang pegas	l	1
Percepatan gravitasi	g	9.8
Konstanta gesekan udara	$b[3]$	$\{1, \alpha, \beta\} \times 0.01225$
Posisi partikel arah x	$r_{x0}[3]$	{2, 3, 2.5}
Posisi partikel arah y	$r_{y0}[3]$	{14, 14, 14.87}

Dari data pada tabel 1 nampak bahwa susunan partikel adalah m_1 dan m_2 sejajar dan terpeltak di bawah m_3. Masing-masing partikel mengalami gaya gesek dengan koefisien gesek yang bervariasi: $\{1, \alpha, \beta\} \times 0.01225$ (0.01225 = g/800) berturut-turut untuk m_1, m_2, dan m_3. Simulasi ini dilakukan pada dua kasus kasus pertama untuk konstanta pegas k seragam (10^8) dan kasus kedua untuk k berbeda (lihat tabel 1).

Untuk mengetahui seberapa besar orientasi sistem berubah seiring waktu, didefinisikan parameter orientasi berupa simpangan vertikal yang terjadi antara posisi pusat masa dan posisi partikel ke-i,

$$r_{ypi} \equiv r_{ypm} - r_i \tag{14}$$

Parameter ini menggambarkan seberapa jauh posisi vertikal partikel berubah dari waktu ke waktu. Jika pada awal nilainya positif dan pada suatu keadaan akhir nilainya negatif maka sistem pasti telah mengalami rotasi. Di sini akan ditinjau seberapa besar "fluktuasi" orientasi partikel yang dialaminya saat jatuh.

Tabel 2. Standar deviasi dari parameter orientasi $r_{yp}[i]$ untuk variasi gesekan tiap benda dan k seragam

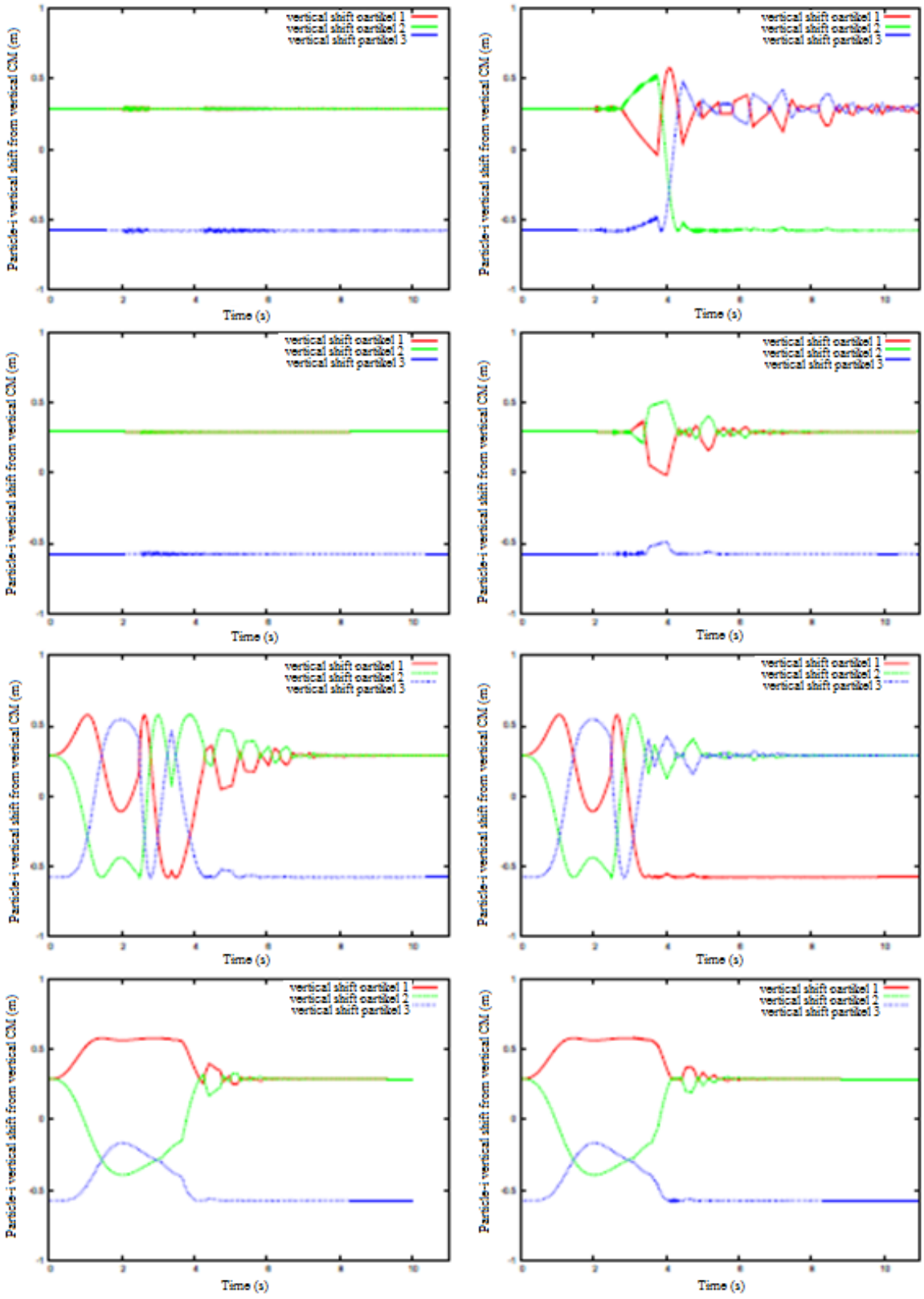
α	β	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{total}
1	1	0.000923	0.000923	0.001845	0.003690
1	4	0.000466	0.000467	0.000933	0.001866
4	1	0.258379	0.312573	0.36744	0.938382
4	4	0.122643	0.253006	0.136158	0.51181

Tabel 3. Standar deviasi dari parameter orientasi $r_{yp}[i]$ untuk variasi gesekan tiap benda dan $k = \{1, 1.2, 1.3\} \times 10^8$

α	β	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{total}
1	1	0.090436	0.436939	0.426239	0.953615
1	4	0.068643	0.53308	0.01634	0.138288
4	1	0.401586	0.296273	0.309193	1.007054
4	4	0.122057	0.252670	0.136205	0.510932

Pada Tabel 2 nampak nilai standar deviasi dari parameter $r_{yp}[i]$, yang dilabelkan dengan σ_i, untuk nilai k seragam. Sementara pada Tabel 3 menampakkan nilai standar deviasi σ_i untuk nilai k seragam. Standar

deviasi ini dihitung dari t = 0 sampai t = 10.3, nilai ini diambil karena pada saat ini partikel sudah dalam keadaan stabil.



Gambar 2. Perubahan parameter r_{yp}[i] (*vertical shift*) terhadap waktu sampai sistem stabil. Kolom kiri untuk k seragam dan kanan untuk k bervariasi. Baris 1 – 4 : (α, β) = (1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4).

Dari tabel 2 dan tabel 3 di atas nampak untuk $\alpha \neq 1$ nilai standar deviasi total lebih besar dibandingkan dengan yang lain, hal ini terjadi karena nilai α menentukan gerak m_1 dan m_2 terus sejajar sebelum tumbukan, dengan melihat simetri cermin dari sistem ini. Nilai yang tidak satu akan membuat m_1 dan m_2 berfluktuasi pada kondisi jatuh bebas, sehingga σ membesar.

Untuk mengamati lebih jauh perilaku perubahan orientasi sistem, amati gambar 2. Gambar ini memberikan informasi tentang dinamika $r_p[i]$ untuk ketiga partikel terhadap waktu. Gambar 2 di atas menunjukkan kurva simpangan vertikal dari tiap partikel relatif terhadap posisi pusat masa. Untuk nilai *k* seragam (kolom kiri) serta nilai konstanta gesekan udara seragam (baris pertama), tidak terjadi perubahan simpangan vertikal. Sedangkan dengan adanya perbedaan nilai konstanta gesekan udara, simpangan vertikal yang dihasilkan akan semakin besar.

Untuk nilai *k* yang tidak seragam (kolom kanan), simpangan vertical yang terjadi semakin lama dibandingkan dengan nilai *k* yang seragam untuk kondisi konstanta gesekan udara yang sama (α=1 dan β=1). Tetapi hasil ini tidak menunjukkan bahwa semakin tidak seragam nilai k semakin lama simpangan vertical terjadi, hal ini bisa kita lihat pada gambar bagian baris 3. Simpangan vertikal yang dihasilkan pada kondisi *k* tidak seragam justru lebih cepat stabil dibandingkan simpangan vertikal pada kondisi *k* seragam. Dan pada gambar pada kolom 4, bentuk kurva simpangan vertikal yang dihasilkan hampir identik antara kondisi *k* seragam dengan kondisi *k* yang tidak seragam. Berdasarkan hasil yang didapatkan, simpangan vertikal lebih dominan dipengaruhi oleh besarnya konstanta gesekan udara, sedangkan pengaruh nilai konstanta pegas relatif lebih rendah. Akan tetapi, pada nilai konstanta gesekan udara yang seragam pengaruh ketidakseragaman konstanta pegas sangat besar terhadap simpangan vertikal.

KESIMPULAN

Berdasarkan pemodelan yang telah dibuat, telah diketahui bahwa parameter yang dominan mempengaruhi orientasi jatuh dari sistem tiga partikel adalah koefisien hambatan udara. Sedangkan ketidakseragaman nilai konstanta pegas hanya berpengaruh pada kondisi konstanta gesekan udara yang seragam. Nilai simpangan vertikal merupakan parameter penting untuk menunjukkan apakah orientasi gerak sistem partikel ini berada dalam kondisi stabil atau sebaliknya.

REFERENSI

1. A. Kilian dan J. Ochsendorf, “Particle-spring systems for struvtural form finding”, *Journal-International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 148, p. 77, 2005.
2. P. Webb, “Interpretation of particle size reported by different analytical techniques”, *Homepage Micromerilics*, 2002.
3. D. Baraff, “Rigid body simulation”, *SIGGRAPH Course Notes 1992*, vol. 19, 1995.
4. J. K. Hahn, “Realistic animation of rigid bodies”, in *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, vol. 22, pp 299-308, ACM, 1988.
5. R. Baber, *Rigid body simulation*. PhD thesis, University of Warwick, 2006.