

Pengolahan Ukuran Gayaberat Relatif dengan Metode Perataan Kuadrat Terkecil dengan Solusi Bertahap

L. M. Sabri^{1,a)}, Leni S. Heliani^{1,b)}, T. A. Sunantyo^{1,c)} dan Nurrohmat Widjajanti^{1,d)}

¹Program Studi S-3 Ilmu Teknik Geomatika,
Departemen Teknik Geodesi,
Program Pascasarjana Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada,
Jl. Grafika No. 2 Yogyakarta, Indonesia, 55281

^{a)}laodesabri@gmail.com (corresponding author)

^{b)}lheliani@ugm.ac.id

^{c)}sunantyo@ugm.ac.id

^{d)}n.widjajanti@gmail.com

Abstrak

Perataan kuadrat terkecil jaring gayaberat bertujuan untuk menentukan nilai gayaberat absolut definitif titik-titik pengukuran dan drift alat. Data gayaberat relatif yang digunakan pada penelitian ini merupakan hasil pengukuran dengan Gravimeter Scintrex CG-5 yang memiliki ketelitian 5 microgals. Pengukuran dilakukan di 81 lokasi di Kota Semarang pada tahun 2014. Perataan parameter kendala minimum secara langsung menggunakan seluruh data gayaberat sekaligus menghasilkan simpangan baku aposteriori sebesar $\pm 0,109$ mgal. Perataan parameter tahap pertama mengaplikasikan untuk memecahkan nilai gayaberat di 34 lokasi menghasilkan simpangan baku aposteriori sebesar $\pm 0,044$ mgal. Perataan tahap kedua melibatkan hasil perataan tahap pertama dengan metode perataan bertahap menghasilkan simpangan baku aposteriori sebesar $\pm 0,069$ m. Nilai gayaberat absolut hasil perataan secara langsung relatif sama dengan hasil perataan bertahap. Selisih terbesar koordinat hanya sebesar 0,015 mgal. Perbedaan yang cukup besar terjadi pada kelompok parameter yang dipecahkan secara bersama pada tahap pertama dan tahap kedua. Perataan dengan metode parameter bertahap memberikan hasil yang relatif sama dengan perataan yang dilakukan secara langsung. Perataan bertahap memudahkan dalam proses pencarian blunder dalam data pengamatan dan deteksi perubahan nilai drift alat

Kata-kata kunci: perataan kuadrat terkecil, solusi bertahap, gayaberat, drift

PENDAHULUAN

Pengukuran gayaberat terdiri atas dua jenis, yaitu: pengukuran gayaberat absolut dan pengukuran gayaberat relative (Torge, 1989). Pengukuran gayaberat absolut adalah pengukuran untuk mendapat nilai gayaberat suatu titik secara langsung, sementara pengukuran gayaberat relatif adalah pengukuran untuk mendapatkan nilai gayaberat suatu titik berdasarkan beda gayaberat terhadap satu atau titik lain yang telah diketahui nilai gayaberat absolutnya. Saat ini, gravimeter absolut umumnya menggunakan prinsip gerak jatuh bebas dalam perhitungan nilai gayaberatnya, sementara gravimeter relatif mengandalkan pada akurasi dari pengukuran panjang pegas dan frekuensi alunan pegas. Proses mobilisasi dan pengaturan gravimeter absolut yang lebih rumit dibandingkan gravimeter relatif mengakibatkan rendahnya produktifitas pengukuran gayaberat absolut. Kondisi tersebut mengakibatkan pengukuran gayaberat relatif lebih efektif untuk pengukuran titik-titik yang banyak pada kondisi lingkungan yang sulit dikontrol.

Proses pengukuran gayaberat tidak terlepas dari adanya kesalahan, baik kesalahan acak, kesalahan sistematis, maupun kesalahan *blunder* (Wolf dan Ghillani, 2006). Deteksi kesalahan dilakukan dengan menerapkan pengukuran lebih atau redundant. Pada dasarnya, hanya kesalahan acak yang boleh ada dalam data ukuran, sementara kesalahan blunder maupun sistematis harus dihilangkan terlebih dahulu. Ukuran lebih pada pengukuran gayaberat relatif dapat diperoleh dengan pengulangan pengukuran di suatu titik maupun dengan melakukan pengulangan pengukuran beda gayaberat antara dua titik. Pada jaring gayaberat yang terdiri atas *loop* atau kitaran yang tidak terhubung satu sama lain, gayaberat absolut didapat dengan menghitung kesalahan sistematis berupa *drift* di setiap titik. Pada jaring gayaberat yang terdiri atas kitaran yang saling terhubung satu sama lain, proses perhitungan yang terbaik adalah *least squares adjustment* atau perataan kuadrat terkecil (Hwang dkk, 2002).

Perataan kuadrat terkecil jaring gayaberat relatif pada dasarnya berfungsi untuk mendapatkan nilai gayaberat absolut dan *drift* yang unik (Hwang dkk, 2002). Pada kondisi ideal, nilai *drift* pegas bersifat konstan sepanjang pengukuran, sehingga proses perataan dapat menggunakan teknik *minimal constraint adjustment*. Guncangan yang cukup kuat dalam suatu periode pengukuran dapat mengakibatkan perubahan *drift* pada gravimeter yang digunakan. Pengabaian perubahan *drift* secara teoritis mengakibatkan penurunan kualitas dari perhitungan nilai gayaberat itu sendiri.

Salah satu teknik yang dapat digunakan untuk mendeteksi perubahan *drift* adalah teknik perataan bertahap atau *sequential solution least squares adjustment* (Leick, 2004). Teknik perataan bertahap diterapkan untuk mensiasati proses perataan jaring dari dua sesi pengukuran yang berbeda. Pada penelitian ini dilakukan pengujian efektifitas teknik perataan bertahap untuk meratakan jaring pengukuran gayaberat relatif di Kota Semarang.

METODE PERATAAN KUADRAT TERKECIL DENGAN SOLUSI BERTAHAP

Metode perataan kuadrat terkecil adalah metode baku yang digunakan untuk menentukan nilai suatu parameter secara unik atau tunggal berdasarkan pengamatan atau pengukuran *redundant* atau berlebih. Dalam metode perataan dengan solusi langsung, hubungan antara parameter (\hat{x}) dan pengamatan (\hat{l}) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\hat{l} = f(\hat{x}) \tag{1}$$

Untuk kasus perataan jaring gayaberat, persamaan (1) dapat dituliskan menjadi persamaan (2) yang menggambarkan hubungan antara gayaberat relatif antar titik ($\Delta\hat{g}$) dan nilai gayaberat absolutnya (\hat{g}).

$$\Delta\hat{g} = f(\hat{g}) \tag{2}$$

Pada pengukuran gayaberat dengan menggunakan pegas, nilai gayaberat relatif merupakan fungsi dari nilai gayaberat di titik pengukuran dan *drift* pegas (d), baik *drift* linear maupun non linear, sebagai berikut

$$\Delta\hat{g} = f(\hat{g}, d) \tag{3}$$

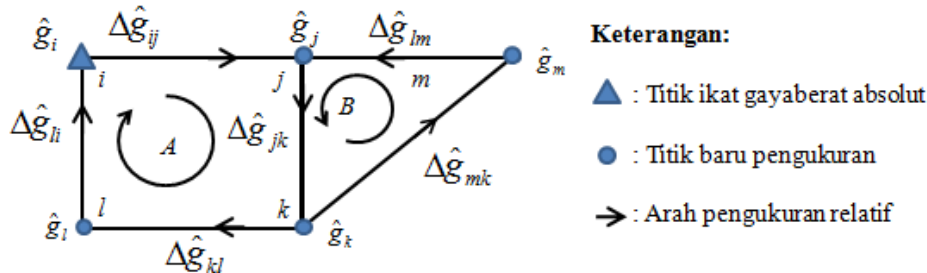
Untuk mengakomodasi faktor kesalahan pengukuran, persamaan (3) dapat dituliskan lagi dalam bentuk

$$\Delta g + V = f(\hat{g}, d) \tag{4}$$

yang dalam hal ini Δg adalah beda gayaberat relatif berdasarkan bacaan gravimeter antara dua titik, sementara V adalah koreksi yang diberikan untuk nilai gayaberat relatif tersebut. Pada suatu jaring gayaberat, seperti pada gambar 1, hubungan beda gayaberat dan koreksi terhadap nilai gayaberat dan *drift* dapat dituliskan dalam bentuk

$$\Delta g_{ij} + V_{ij} = \hat{g}_j - \hat{g}_i + (t_j - t_i) \hat{d}_A \tag{5}$$

Pada persamaan (5) tersebut, \hat{d}_A adalah parameter *drift* linear di kitaran (*loop*) A, sementara t_i dan t_j adalah variabel waktu pengamatan di titik i dan j .



Gambar 1. Contoh jaring pengukuran gayaberat relatif

Salah satu persamaan koreksi yang dapat disusun berdasarkan contoh jaring gayaberat pada loop A pada Gambar 1 adalah

$$V_{ij} = -\hat{g}_i + \hat{g}_j + (t_j - t_i)\hat{d}_A - (\Delta g_{ij}) \tag{6}$$

Adapun salah satu persamaan koreksi pada loop B dapat dituliskan dalam bentuk

$$V_{jk} = -\hat{g}_j + \hat{g}_k + (t_k - t_j)\hat{d}_B - (\Delta g_{jk}) \tag{7}$$

Pada kasus drift kuadratik, rumus persamaan koreksi menjadi

$$V_{ij} = -\hat{g}_i + \hat{g}_j + (t_j - t_i)\hat{d}_A + (t_j - t_i)^2 \cdot \hat{d}_A - (\Delta g_{ij}) \tag{8}$$

atau

$$V_{ij} = -\hat{g}_i + \hat{g}_j + \left\{ (t_j - t_i)^2 + (t_j - t_i) \right\} \hat{d}_A - (\Delta g_{ij}) \tag{9}$$

Umumnya drift gravimeter akan berlaku pada setiap loop dalam jaring gayaberat, sehingga

$$drift = d = \hat{d}_A = \hat{d}_B \tag{10}$$

Dalam bentuk operasi matrik, hubungan antara matrik koreksi (V) terhadap matrik koefisien parameter (A), matrik parameter (X) dan matrik konstanta (F) dirumuskan dalam bentuk

$$V = A.X + F \tag{11}$$

Perhitungan matrix parameter yang berisi nilai gayaberat dan nilai drift alat dapat dipecahkan dengan metode perataan kuadrat terkecil solusi langsung menggunakan persamaan

$$X = -(A^T . P . A)^{-1} (A^T . P . F) \tag{12}$$

Matrik (P) adalah matrik bobot pengamatan yang tergantung pada variansi data ukuran

$$P = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{\Delta g_{ij}}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{\Delta g_{jk}}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{\Delta g_{kl}}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \tag{13}$$

atau bobot pengamatan yang merupakan fungsi dari lamanya waktu yang dibutuhkan pada pengamatan gayaberat relatif antara dua titik yang berurutan

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t_{ij}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t_{jk}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t_{kl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \tag{14}$$

Dengan mengaplikasikan titik i sebagai titik ikat yang telah diketahui nilai gayaberat absolutnya, maka isi dari matrik A dan matrik X yang dapat disusun berdasarkan jaring pengukuran pada gambar 1 dapat dituliskan dalam persamaan (15) dan (16).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_j - t_i \\ -1 & 1 & 0 & 0 & t_k - t_j \\ 0 & -1 & 1 & 0 & t_l - t_k \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t_i - t_l \\ -1 & 1 & 0 & 0 & t_k - t_j \\ 0 & -1 & 0 & 1 & t_m - t_k \\ 1 & 0 & 0 & -1 & t_j - t_m \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$X = \begin{bmatrix} \hat{g}_j \\ \hat{g}_k \\ \hat{g}_l \\ \hat{g}_m \\ d \end{bmatrix} \tag{16}$$

Matrik F adalah matrik satuan yang besarnya ditentukan oleh nilai gayaberat absolut di titik ikat (\hat{g}_i) dan counter reading gravimeter di titik-titik pengukuran (r_i, r_j, r_k, r_l, r_m) yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} -\hat{g}_i - (r_j - r_i) \\ -(r_k - r_j) \\ -(r_l - r_k) \\ \hat{g}_i - (r_i - r_l) \\ -(r_k - r_j) \\ -(r_m - r_k) \\ -(r_j - r_m) \end{bmatrix} \tag{17}$$

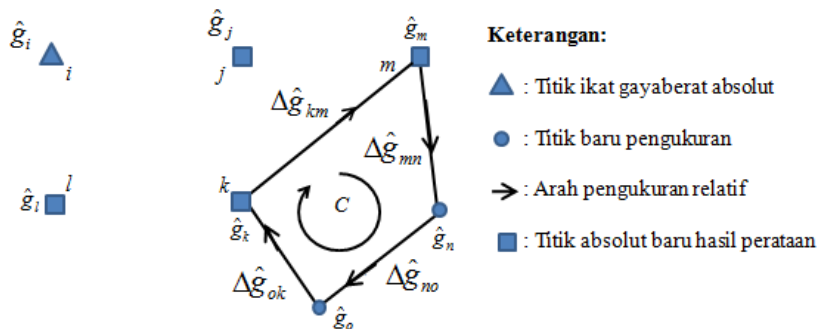
Presisi jaring gayaberat hasil perataan dinyatakan dalam varian aposteriori (σ_0^2) yang ditentukan oleh kuadrat koreksi dan jumlah pengamatan (n) dan jumlah parameter (u) yang dihitung dengan persamaan

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n - u} \tag{18}$$

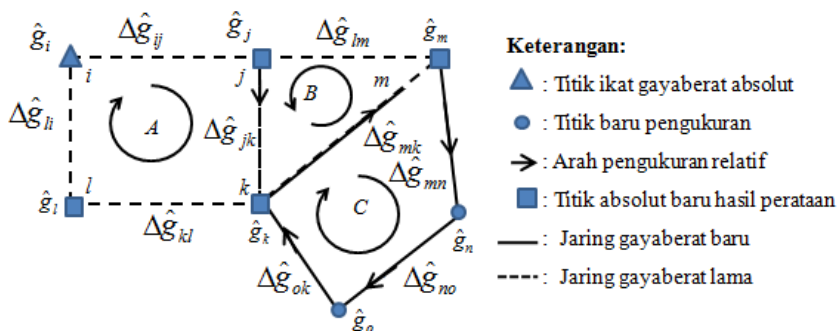
Varian parameter hasil perataan dapat dihitung dengan persamaan

$$\sigma_x^2 = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \tag{19}$$

Setelah proses perataan kuadrat terkecil, maka titik-titik pengukuran memiliki nilai gayaberat absolut yang unik beserta presisinya. Titik kontrol yang digunakan untuk pengukuran hanya titik yang terhubung dengan jaring gayaberat baru, seperti pada Gambar 2. Untuk mendapatkan orde ketelitian yang sama, maka hasil perataan sebelumnya harus dilibatkan dalam hitung perataan jaring baru, seperti pada Gambar 3.



Gambar 2. Skema pengukuran perataan jaring baru dengan solusi langsung



Gambar 3. Skema pengukuran perataan jaring baru dengan solusi bertahap

Metode perataan bertahap diterapkan untuk menghitung efek dari penambahan data baru pada hasil perataan sebelumnya. Dua kelompok data yang dihitung dengan metode ini dapat dituliskan dalam bentuk model perataan kombinasi seperti pada persamaan

$$f_1(l_1, x) = 0 \tag{20}$$

dan

$$f_2(l_2, x) = 0 \tag{21}$$

Pada persamaan (20) dan (21) terlihat bahwa keduanya mengandung parameter yang sama (x) yang harus dipecahkan dengan menggunakan data pengamatan pada tahap pertama (l_1) dan data pengamatan tahap kedua (l_2). Untuk perhitungan perataan jaring gayaberat, persamaan (20) dan (21) dapat dituliskan kembali menjadi persamaan

$$f_1(\Delta g_1, g) = 0 \tag{22}$$

dan

$$f_2(\Delta g_2, g) = 0 \tag{23}$$

yang dalam hal ini,

$\Delta g_1, \Delta g_2$: beda gayaberat
 g : gayaberat

Dua kelompok pengamatan pada persamaan (22) dan (23) tidak berkorelasi, sehingga pembobotan (P) diberikan pada masing-masing ukuran berdasarkan variansi data ukuran tahap pertama (σ_1^2) dan variansi data ukuran tahap kedua (σ_2^2). Hubungan antara bobot (P) terhadap variansi apriori (σ_0^2), variansi ukuran (σ_1^2) dan (σ_2^2) dirumuskan sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Proses perhitungan nilai gayaberat dan *drift* dengan metode perataan kuadrat terkecil solusi bertahap, dalam bentuk matrik, dirumuskan sebagai berikut:

$$X = -(N_1 + N_2)^{-1}(U_1 + U_2) \tag{25}$$

yang dalam hal ini

$$N_1 = A_1^T . P_1 . A_1 \tag{26}$$

$$U_1 = A_1^T . P_1 . F_1 \tag{27}$$

$$N_2 = A_2^T . P_2 . A_2 \tag{28}$$

$$U_2 = A_2^T . P_2 . F_2 \tag{29}$$

Operasi matrik pada persamaan (25) harus dilakukan secara hati-hati, karena ukuran matrik N_1 dan N_2 , serta U_1 dan U_2 berbeda. Pada persamaan (26), ukuran matrik N_1 yang diturunkan dari pengamatan tahap pertama dengan ukuran harus dimanipulasi untuk menyesuaikan dengan ukuran matrik N_2 pada persamaan (28) yang diperoleh dari pengamatan tahap kedua. Pada persamaan (27), ukuran matrik U_1 yang mengindikasikan parameter tahap pertama harus disesuaikan dengan ukuran matrik U_2 pada persamaan (29) yang menunjukkan parameter tahap kedua.

Perhitungan ketelitian hasil perataan bertahap melibatkan residu hasil perataan tahap pertama dan tahap kedua (Leick, 2004). Kuadrat residu dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (30),

$$V^T . P . V = V^T . P . V * + \Delta V^T . P . V \tag{30}$$

yang dalam hal ini

$$V^T . P . V * = -U_1^T N_1^{-1} . U_1 + F_1^T P_1^{-1} . F_1 \tag{31}$$

$$\Delta V^T P V = (A_2 X * + F_2)^T . [P_2^{-1} + A_2 . N_1^{-1} . A_2^T]^{-1} . (A_2 X * + F_2) \tag{32}$$

Varian aposteriori perataan bertahap dapat dihitung dengan persamaan

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T . P . V}{n_1 + n_2 - u} \tag{33}$$

yang dalam hal ini n_1 adalah jumlah ukuran tahap pertama, n_2 adalah jumlah ukuran tahap kedua, dan u adalah jumlah parameter seluruhnya. Matrik kofaktor parameter dihitung dengan persamaan

$$Q_{xx} = Q_{xx}^* + \Delta Q_{xx} \tag{34}$$

yang merupakan penjumlahan kofaktor parameter yang dihitung pada tahap pertama, yaitu:

$$Q_{xx}^* = N_1^{-1} \tag{35}$$

dan kofaktor parameter yang diakibatkan oleh penambahan persamaan pengamatan baru, yaitu:

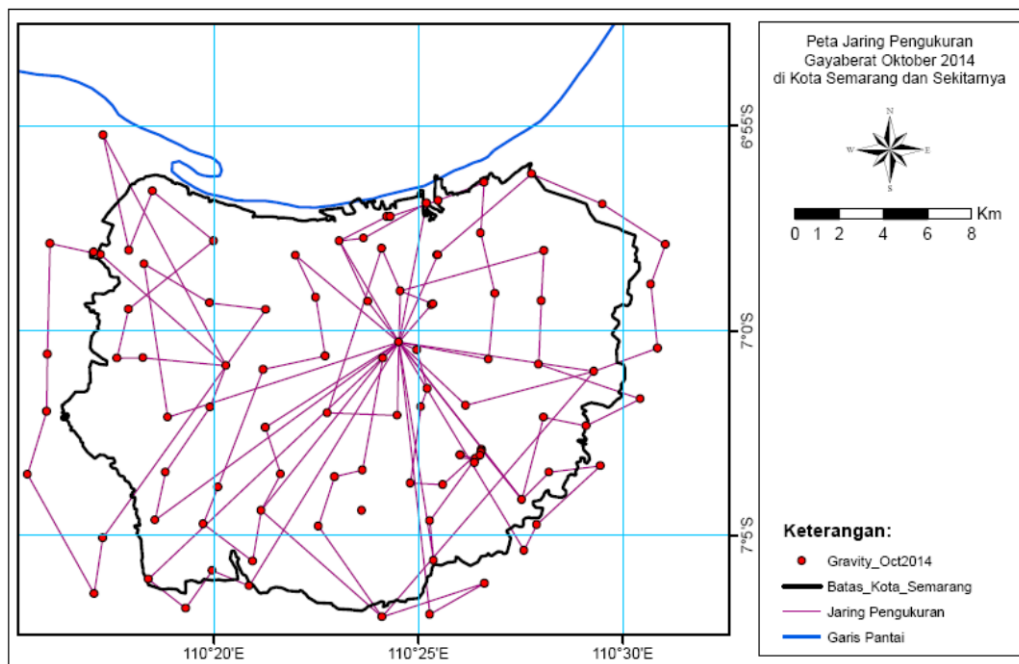
$$\Delta Q_{xx} = -N_1^{-1} A_2^T [P_2^{-1} + A_2 N_1^{-1} A_2^T]^{-1} A_2 N_1^{-1} \tag{36}$$

Presisi nilai gayaberat dan *drift* hasil perataan secara bertahap selanjutnya dihitung dengan menggunakan persamaan (19).

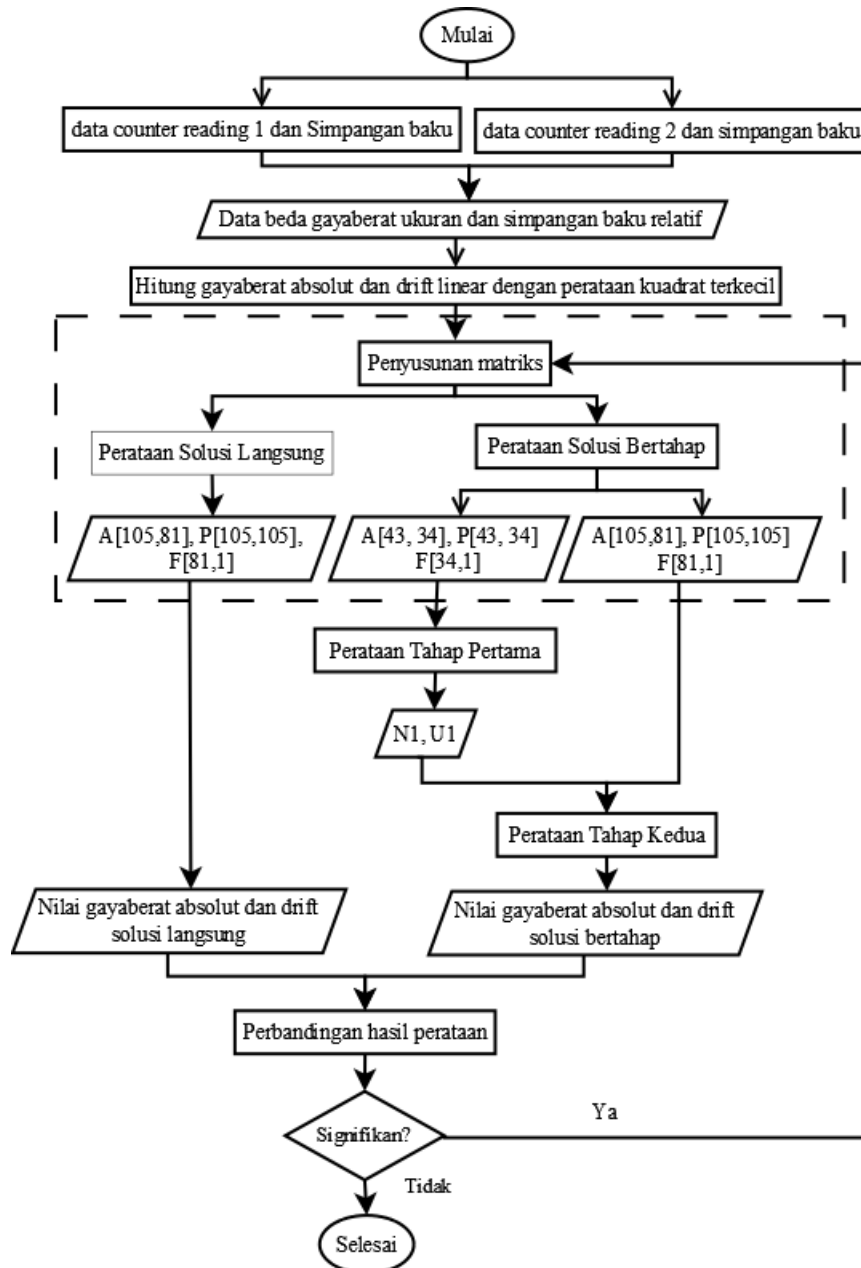
METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan data gayaberat relatif di Kota Semarang yang diukur dengan menggunakan Gravimeter Scintrex CG-5 pada tanggal 25 September 2014 hingga 1 Oktober 2014. Pada penelitian ini, jaring gayaberat terdiri atas 105 *baseline* yang terbentuk dari hasil pengamatan di 82 titik, seperti terlihat pada Gambar 4. Pada setiap sesi pengamatan di stasiun pengukuran, Gravimeter merekam nilai bacaan (*counter reading*) gayaberat dan simpangan bakunya, serta waktu pengamatan. Perataan kuadrat terkecil dihitung *secara minimum constrained* yang terikat pada satu titik ikat, yaitu KKOP 16 yang berada di bagian tengah wilayah pengukuran.

Penelitian ini pada dasarnya bertujuan untuk membandingkan hasil perataan jaring secara langsung dan hasil perataan secara bertahap. Skema pelaksanaan penelitian diilustrasikan pada Gambar 5. Teknik perataan bertahap pada penelitian ini dilakukan dalam dua tahap. Perataan tahap pertama menggunakan data pengukuran gayaberat pada tanggal 25 September hingga 28 September 2014, sementara perataan tahap kedua mengakomodasi data ukuran pada tanggal 29 September 2014 hingga 1 Oktober 2014. Perataan tahap pertama digunakan untuk memecahkan nilai gayaberat absolut di 34 titik dan satu parameter *drift*. Perataan tahap kedua dilakukan untuk menghitung seluruh parameter dengan menggunakan seluruh data ukuran.



Gambar 4. Peta jaring pengukuran Gayaberat relatif Kota Semarang dan sekitarnya



Gambar 5. Skema perhitungan gayaberat dan *drift* dengan solusi langsung dan solusi bertahap

HASIL DAN PEMBAHASAN

Perataan parameter kendala minimum secara langsung menggunakan seluruh data gayaberat sekaligus menghasilkan simpangan baku aposteriori sebesar $\pm 0,109$ mgal. Perataan parameter tahap pertama mengaplikasikan untuk memecahkan nilai gayaberat di 34 lokasi menghasilkan simpangan baku aposteriori sebesar $\pm 0,044$ mgal. Perataan tahap kedua melibatkan hasil perataan tahap pertama dengan metode perataan bertahap menghasilkan simpangan baku aposteriori sebesar $\pm 0,069$ m.

Nilai gayaberat absolut hasil perataan secara langsung relatif sama dengan hasil perataan bertahap. Selisih terbesar koordinat hanya sebesar 0,015 mgal. Perbedaan yang cukup besar terjadi pada kelompok parameter yang dipecahkan secara bersama pada tahap pertama dan tahap kedua.

KESIMPULAN

- Berdasarkan hasil perhitungan dengan prinsip kuadrat terkecil, maka disimpulkan sebagai berikut:
- Perataan dengan metode parameter bertahap memberikan hasil yang relatif sama dengan perataan yang dilakukan secara langsung.
 - Perataan bertahap memudahkan dalam proses pencarian blunder dalam data pengamatan dan deteksi perubahan nilai *drift* alat

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT UGM atas dukungan finansial melalui skema PMDSU 2014, sehingga pengukuran gayaberat di Kota Semarang pada tahun 2014 dapat terlaksana. Terimakasih kepada Leni Sophia Heliani, ST., M.Sc., D.Sc dan Bagas Triarahmadhana, ST., M.Eng atas segala bantuannya.

REFERENSI

1. Hwang, Cheinway, Cheng-Gi Wang, Li-Hua Lee. (2002). *Adjustment of relative gravity measurements using weighted and datum-free constraints*. Computers & Geosciences 28 (2002) 1005 - 1015
2. Leick, Alfred. (2004). *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons.
3. Torge, Wolfgang. (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter. Berlin
4. Wolf, Paul R., Charles D. Ghillani. (2006). *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis*. John Wiley & Sons, Inc